Interrogation n°2

Exercice 1 (Questions de cours : applications linéaires continues)**.**
Soit $\ell : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ une application linéaire entre espaces vectoriels normés. On rappelle que les énoncés suivants sont équivalents :
– ℓ est continue sur E,
– il existe une constante $k \geq 0$ satisfaisant à la propriété (P) : $\forall\, x \in E \quad \|\ell(x)\|_F \leq k\, \|x\|_E$.
L'application ℓ est supposée continue. Soit $\|\ell\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \inf\{k \geq 0 \mid k \text{ vérifie } (P)\}$.

a) Expliquer pourquoi cet infimum a bien un sens.

b) Remarquer qu'un réel $k \geq 0$ vérifie (P) si, et seulement si, $k \geq \sup\limits_{x \in E\setminus\{0\}} \dfrac{\|\ell(x)\|_F}{\|x\|_E}$.
Indication : raisonner par équivalence, en justifiant soigneusement chaque étape.

c) En déduire que $\|\ell\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup\limits_{x \in E\setminus\{0\}} \dfrac{\|\ell(x)\|_F}{\|x\|_E}$ et que $\|\ell\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ vérifie (P).

Exercice 2 (Dualité)**.**
Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Son *dual (topologique)*, noté E', est l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ des formes linéaires $\ell : E \to \mathbb{R}$ continues, muni de la norme subordonnée

$$\|\ell\|_{E'} = \|\ell\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})} = \sup_{x \in E\setminus\{0\}} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|_E}.$$

Cet exercice a pour objectif de démontrer qu'il existe une application naturelle de E dans son *bidual* $E'' = (E')'$ (le dual du dual).

a) Soit $x_0 \in E$ et soit $J_{x_0} : E' \to \mathbb{R}$ la forme linéaire sur E' définie par $J_{x_0}(\ell) = \ell(x_0)$ pour tout $\ell \in E'$. Vérifier que J_{x_0} est bien linéaire.

b) Montrer, par le même coup, que J_{x_0} est continue et que $\|J_{x_0}\|_{E''} \leq \|x_0\|_E$.
Indication : justifier et écrire la propriété (P) de l'exercice 1 pour $k = \|\ell\|_{E'}$ et $x = x_0$, en prenant bien garde au fait que l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ est muni de la norme $|\cdot|$ (valeur absolue).
Ainsi, J_{x_0} est un élément de E'' (forme linéaire continue sur E').

c) En déduire que l'application linéaire (on peut admettre qu'elle est linéaire ou le démontrer)

$$J : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E'' \\ x & \longmapsto & \{J_x : \ell \mapsto \ell(x)\} \end{array} \right.$$

est continue et que $\|J\|_{\mathcal{L}(E,E'')} \leq 1$.

Exercice 3 (Fonctions homogènes)**.**
Dans tout cet exercice, Ω est l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et α un réel. On dit que f *homogène de degré* α si

$$\forall\, x \in \Omega \qquad \forall\, t > 0 \qquad f(tx) = t^\alpha f(x).$$

a) (Question préliminaire) Si $\gamma : \mathbb{R} \to \Omega$ est une fonction dérivable, montrer que $f \circ \gamma$ l'est aussi et que $(f \circ \gamma)'(t) = Df(\gamma(t))(\gamma'(t))$.

b) f est supposée homogène de degré α. Soit $x \in \Omega$. En étudiant la dérivabilité de $g : t \mapsto f(e^t x)$ en 0, montrer que $Df(x)(x) = \alpha\, f(x)$.

c) Réciproquement, on suppose que $Df(x)(x) = \alpha\, f(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Montrer que f est homogène de degré α.
Indication : montrer que la fonction $g : t \mapsto f(e^t x)$ vérifie l'équation différentielle $y' = \alpha y$.