Contrôle 2. Espace vectoriel normé, différentiabilité

Exercice 1. Soit $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Montrer que toute forme linéaire de E est continue sur $(E, ||\cdot||)$.
On rappelle qu'une forme linéaire sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Aide : on pourra montrer que si f est une forme linéaire sur $(E, ||\cdot||)$, alors $N : x \mapsto ||x|| + |f(x)|$ définit aussi une norme sur E.

Exercice 2. Montrer que le système suivant admet une unique solution.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{4}\sin(x+y) \\ y & = & 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y) \end{array} \right.$$

Aide : on pourra utiliser la norme $||\cdot||_1$ sur $\mathbb{R}^2$, définie par $||(h,k)||_1 = |h| + |k|$.

Exercice 3. On considère l'application $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto {}^tMM$.
On munit l'espace $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $|||\cdot|||$ définie par :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ |||M||| = \max_{i=1..n} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|.$$

On admettra que cette norme est sous-multiplicative, i.e qu'elle vérifie :

$$\forall M, N \in M_n(\mathbb{R}),\ |||MN||| \leqslant |||M|||\,|||N|||.$$

a) Montrer que si $|||H||| \to 0$, alors $|||{}^tH||| \to 0$.

b) Montrer que φ est différentiable en utilisant la définition de différentiabilité et calculer $D\varphi(M)$.

c) *(Plus difficile...)* On suppose que $M \in O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / {}^tMM = I_n\}$.
Calculer le rang de $D\varphi(M)$.
Aide : on pourra commencer par regarder $\ker(D\varphi(M))$.