

# Formes optimales : hier, aujourd'hui et demain

Charles Dapogny\*

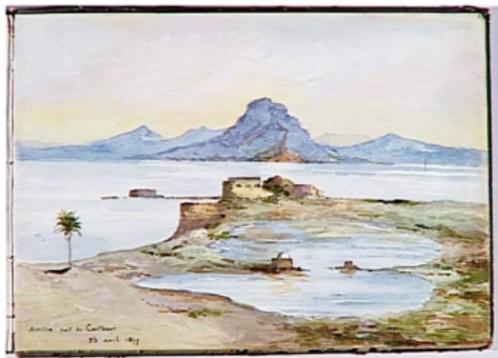
\* CNRS & Laboratoire Jean Kuntzmann, Université Grenoble-Alpes, Grenoble, France

Remerciements : G. Allaire, B. Buet, F. Feppon, P. Geoffroy, N. Lebbe, Y. Maday, N. Nguyen, Y. Privat.

18 Janvier, 2018

## Avant-propos

- L'**optimisation de formes** s'intéresse à la minimisation d'une fonction **objectif** qui dépend de la forme (un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ), sous certaines **contraintes**.
- De tels problèmes se sont posés très tôt dans l'histoire des sciences, et apparaissent fréquemment dans la nature.
- Ils suscitent aujourd'hui un grand engouement dans les milieux de l'ingénierie.
- Ils sont à l'interface des mathématiques, de la physique-mécanique, et de l'informatique.
- L'optimisation de formes est aujourd'hui un domaine en pleine ébullition !



## Disclaimer

**Any views or opinions expressed herein are solely those of the author and do not necessarily represent those of any company.**

## 1 Introduction

## 2 Quelques exemples historiques et concrets

- Le problème de Didon et l'inégalité isopérimétrique
- Les surfaces minimales
- Optimisation de formes en architecture
- Des formes optimales dans la nature (I) : pavages optimaux
- Des formes optimales dans la nature (II) : la forme des hématies

## 3 Quelques outils modernes d'optimisation de formes

- L'optimisation de fonctions réelles
- Existence de formes optimales
- Représentation numérique des formes, et calculs mécaniques
- Optimiser des formes
- Quelques applications

## 4 Quelques challenges

- Optimisation de formes... robuste
- La fabrication additive au secours de la complexité

## 1 Introduction

## 2 Quelques exemples historiques et concrets

- Le problème de Didon et l'inégalité isopérimétrique
  - Les surfaces minimales
  - Optimisation de formes en architecture
  - Des formes optimales dans la nature (I) : pavages optimaux
  - Des formes optimales dans la nature (II) : la forme des hématies

## 3 Quelques outils modernes d'optimisation de formes

- L'optimisation de fonctions réelles
- Existence de formes optimales
- Représentation numérique des formes, et calculs mécaniques
- Optimiser des formes
- Quelques applications

## 4 Quelques challenges

- Optimisation de formes... robuste
- La fabrication additive au secours de la complexité

## Le problème de Didon (I)

- Le **Problème de Didon** figure dans le mythe de la **fondation de Carthage** par la princesse phénicienne Didon, en 814 av. J. C. (cf. l'*Énéide* de Virgile, ≈ 100 av. J. C.).
- Didon fuit Tyr (actuel Liban) après l'assassinat de son mari par son frère Pygmalion.
- Elle débarque sur les côtes de Tunisie, où elle sollicite une terre auprès du roi Jarbas, ...
- *... ensuite, ayant acheté l'emplacement qui pourrait être couvert par une peau de bœuf, sur lequel elle pourrait refaire les forces de ses compagnons, épuisés par une longue navigation, jusqu'à ce qu'elle s'en aille, elle ordonne de découper la peau en très fines lanières et, ainsi, elle s'empare d'un espace plus grand que celui qu'elle avait demandé ;*

[Justin, Livre XVIII, 157]

## Le problème de Didon (II)

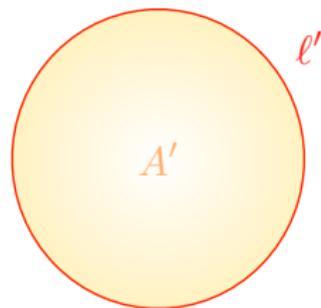
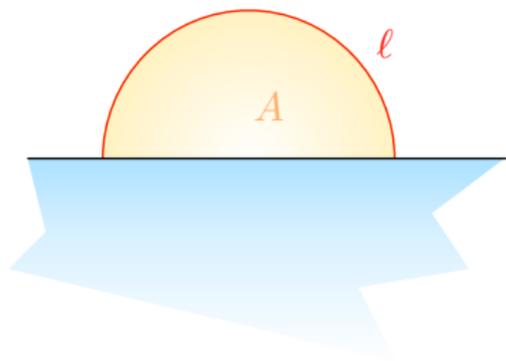


W. Turner: *'Dido Building Carthage'* ou *'The Rise of the Carthaginian Empire'* (1815).

## Le problème de Didon (III)

En termes modernes :

Avec une longueur de contour  $\ell$  donnée, comment entourer une aire maximale  $A$  ?



(Gauche) La solution du problème de Didon, où le domaine à entourer est limité par la mer ;  
(droite) une version 'sans contrainte' du problème de Didon.

## L'inégalité isopérimétrique

- Sans le savoir, la reine Didon venait de découvrir l'**inégalité isopérimétrique**.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine dont le bord  $\partial\Omega$  est 'assez régulier'. Soit  $A$  l'aire de  $\Omega$ , et  $\ell$  la longueur de  $\partial\Omega$ . Alors,

$$4\pi A \leq \ell^2,$$

et l'égalité a lieu si et seulement si  $\Omega$  est un disque.

- De manière équivalente,

Parmi tous les domaines  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  d'**aire donnée**, celui de **périmètre minimal** est le disque.

- D'autres versions de ce problème existent.

Par exemple : on peut imposer au bord de  $\Omega$  de contenir une partie non optimisable (un morceau de droite).

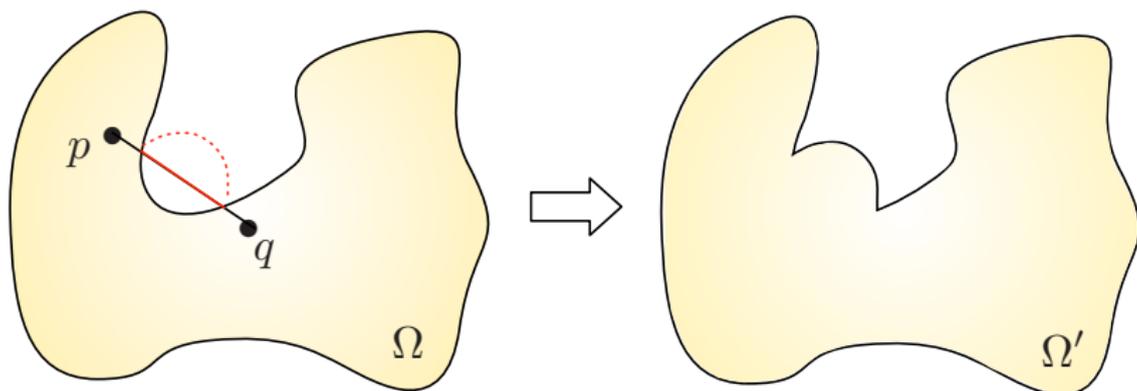
## La pseudo-preuve de Steiner (1838) (I)

On **suppose** qu'il existe une forme **optimale**  $\Omega$ , i.e de périmètre  $\ell$  donné, d'aire maximale.

Étape 1 : On montre que  $\Omega$  est **convexe**.

On raisonne *par l'absurde* : si  $\Omega$  n'est pas convexe, il existe deux points  $p, q \in \Omega$  tels que le segment  $[p, q]$  n'est pas complètement inclus dans  $\Omega$ .

Par symétrie d'un morceau de  $\partial\Omega$  par rapport à  $[p, q]$ , on obtient un nouveau domaine  $\Omega'$  de même périmètre que  $\Omega$  mais une aire plus grande. **Contradiction.**



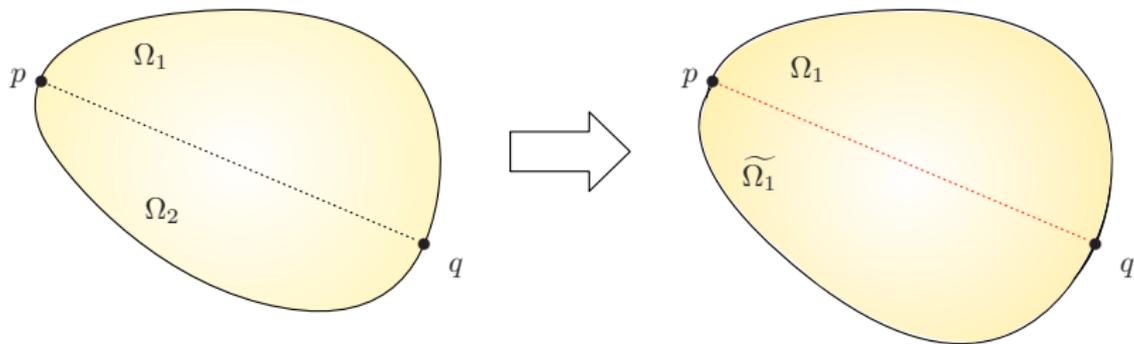
## La pseudo-preuve de Steiner (1838) (II)

On choisit deux points  $p$  et  $q$  sur  $\partial\Omega$  de sorte que les deux arcs qu'ils délimitent sur  $\partial\Omega$  aient même longueur  $\ell/2$ . Le segment  $[p, q]$  coupe  $\Omega$  en  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

Étape 2 : On montre que  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  ont même aire.

On raisonne encore par l'absurde : si tel n'est pas le cas, par exemple,  $|\Omega_1| > |\Omega_2|$ .

En notant  $\widetilde{\Omega}_1$  le symétrique de  $\Omega_1$  par rapport à  $[p, q]$ , le nouveau domaine  $\Omega' = \Omega_1 \cup \widetilde{\Omega}_1$  a même périmètre que  $\Omega$ , mais est d'aire  $2|\Omega_1| > |\Omega|$ . **Contradiction.**



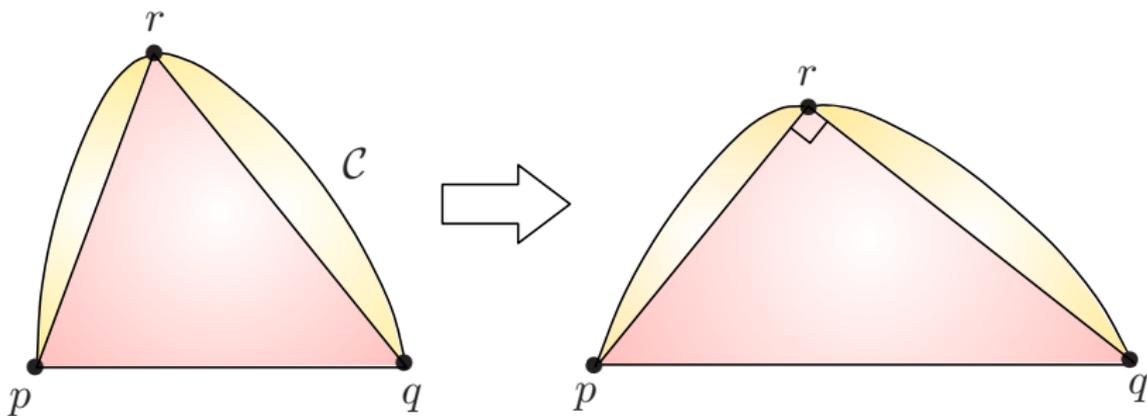
## La pseudo-preuve de Steiner (1838) (III)

Étape 3 : On montre que  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont des demi-disques.

Par l'absurde : si  $\Omega_1$  n'est pas un demi-disque, il existe  $r \in \mathcal{C}$  tel que  $\hat{r} \neq \frac{\pi}{2}$ .

On fait glisser  $p$  et  $q$  sur  $(p, q)$  et  $r$  de sorte que l'angle  $\hat{r}$  devienne  $\frac{\pi}{2}$ . L'aire du triangle  $pqr$  augmente car parmi tous les triangles dont deux longueurs sont fixées, celui d'aire maximale est le triangle rectangle.

La longueur de l'arc  $\mathcal{C}$  et l'aire des lobes sont inchangées. **Contradiction.**



## La pseudo-preuve de Steiner (1838) (IV)

- La preuve n'est pas parfaitement rigoureuse : on a **supposé** que la forme optimale existe... et montré qu'**alors**, celle-ci est un disque.
- Beaucoup de problèmes d'optimisation de formes n'ont pas de solution, pour des raisons mathématiques et physiques parfois profondes.
- Il fallut attendre K. Weierstrass pour une preuve complète de l'inégalité isopérimétrique en deux dimensions ( $\approx 1860$ ).
- L'inégalité isopérimétrique est vraie dans d'autres contextes, par exemple en 3d (H. Schwarz, 1884) :

Parmi tous les domaines  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  de **volume donné**, celui de **surface minimale** est la boule.

## Autres manifestations de l'inégalité isopérimétrique

Les villes médiévales sont souvent de forme circulaire afin de minimiser le périmètre de fortifications requises autour d'une population (i.e. d'une aire) donnée.



Carte du Paris médiéval.

## 1 Introduction

## 2 Quelques exemples historiques et concrets

- Le problème de Didon et l'inégalité isopérimétrique
- **Les surfaces minimales**
- Optimisation de formes en architecture
- Des formes optimales dans la nature (I) : pavages optimaux
- Des formes optimales dans la nature (II) : la forme des hématies

## 3 Quelques outils modernes d'optimisation de formes

- L'optimisation de fonctions réelles
- Existence de formes optimales
- Représentation numérique des formes, et calculs mécaniques
- Optimiser des formes
- Quelques applications

## 4 Quelques challenges

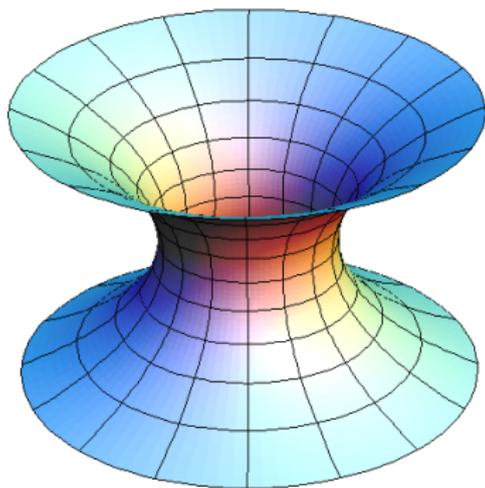
- Optimisation de formes... robuste
- La fabrication additive au secours de la complexité

## Un problème plus général : les surfaces minimales

- En 1744, Leonhard Euler posait la question :

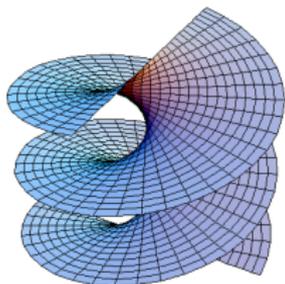
*Quelle est la surface d'aire minimale s'appuyant sur deux cercles identiques et parallèles ?*

- Il découvrit la **caténoïde**.
- En 1755, Lagrange énonça les **équations d'Euler-Lagrange**, décrivant le comportement mathématique de telles **surfaces minimales**.
- En 1776, Meusnier en déduisit que les surfaces minimales ont nécessairement une **courbure moyenne nulle**.

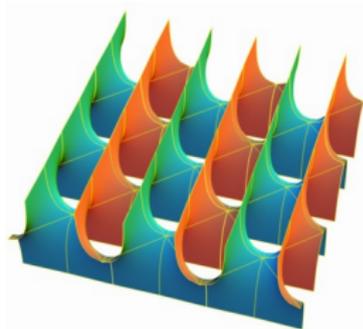


## Un problème plus général : les surfaces minimales

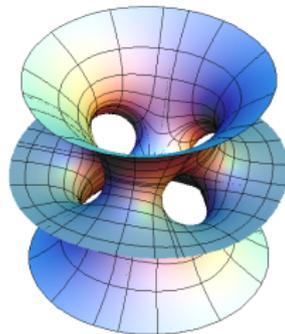
Il existe beaucoup d'autres **surfaces minimales**, associées à d'autres contraintes.



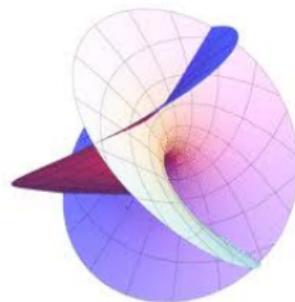
*L'hélicoïde*



*La surface de Scherk*



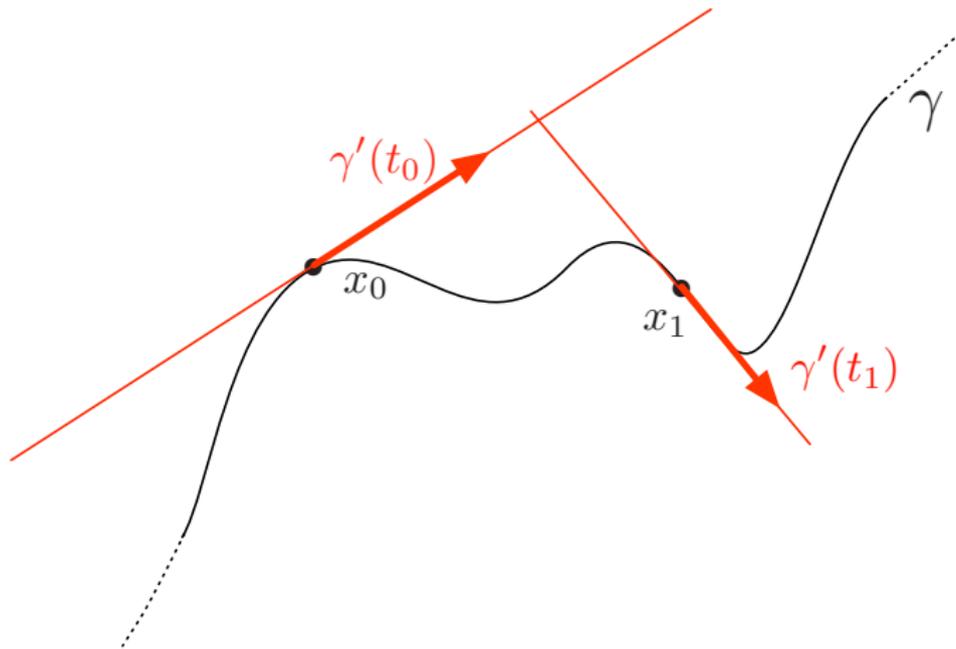
*La surface de Costa*



*La surface de Enneper*

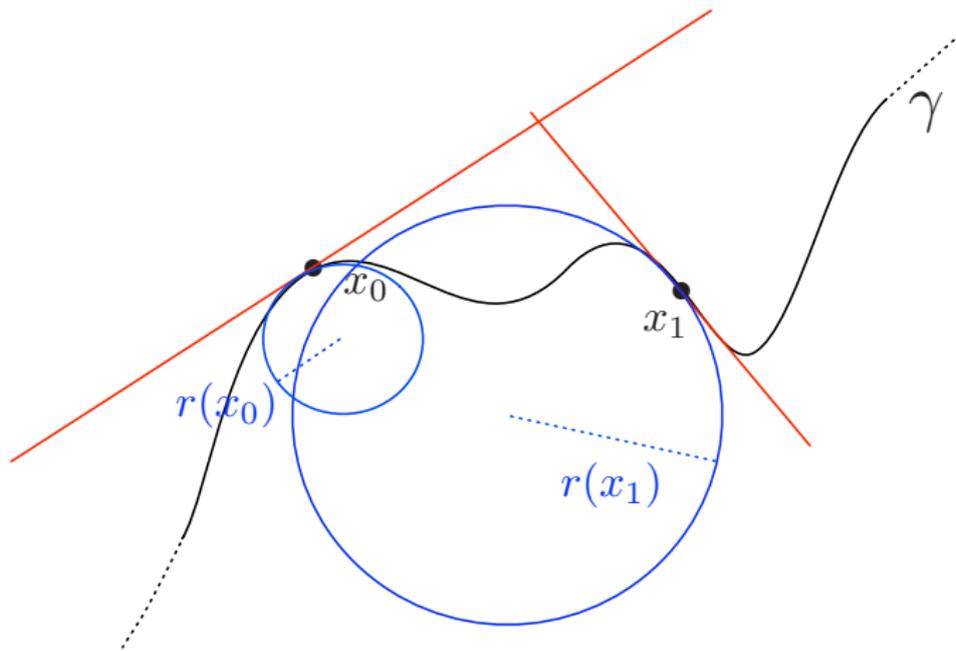
## La courbure d'une courbe (I)

Une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  ressemble à une droite, dont la pente est donnée par le vecteur dérivé.



## La courbure d'une courbe (II)

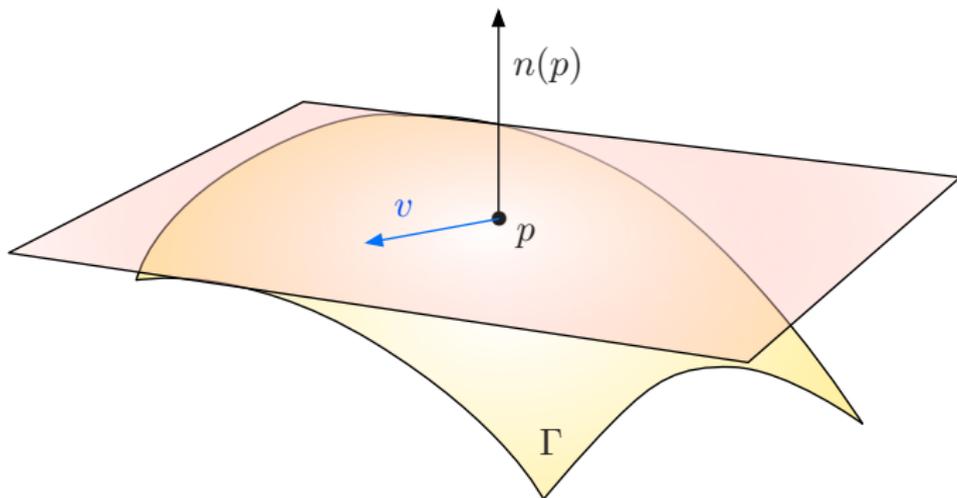
À l'ordre 2 autour de  $x_0 = \gamma(t_0)$ ,  $\gamma$  ressemble au **cercle osculateur**, de rayon  $r(x)$  (le rayon de courbure). La courbure  $\kappa(x)$  de  $\gamma$  en  $x$  est  $\kappa(x) = \frac{1}{r(x)}$ .



## La courbure d'une surface (I)

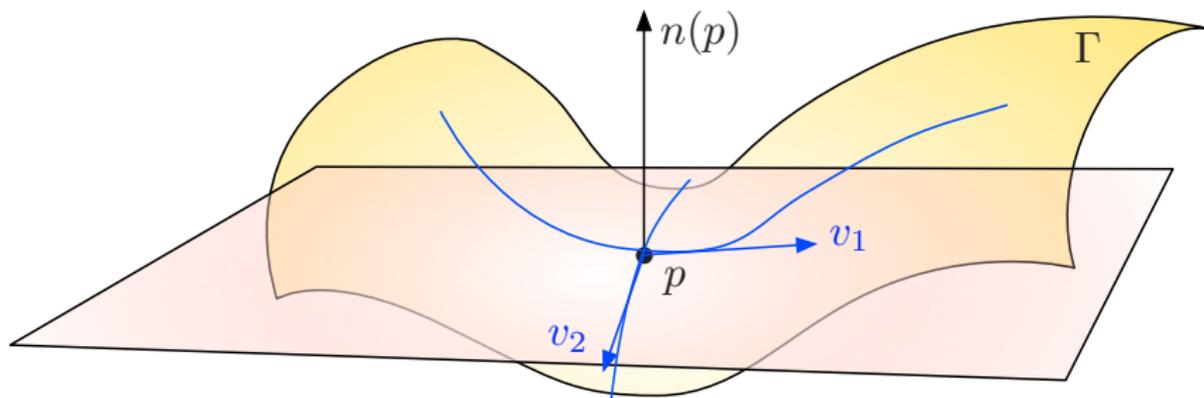
À l'ordre 1, au voisinage d'un point  $p \in \Gamma$ , une surface  $\Gamma$  se comporte comme un plan, son **plan tangent**,

- De **vecteur normal**  $n(p)$ ,
- Qui contient les **directions tangentes**.



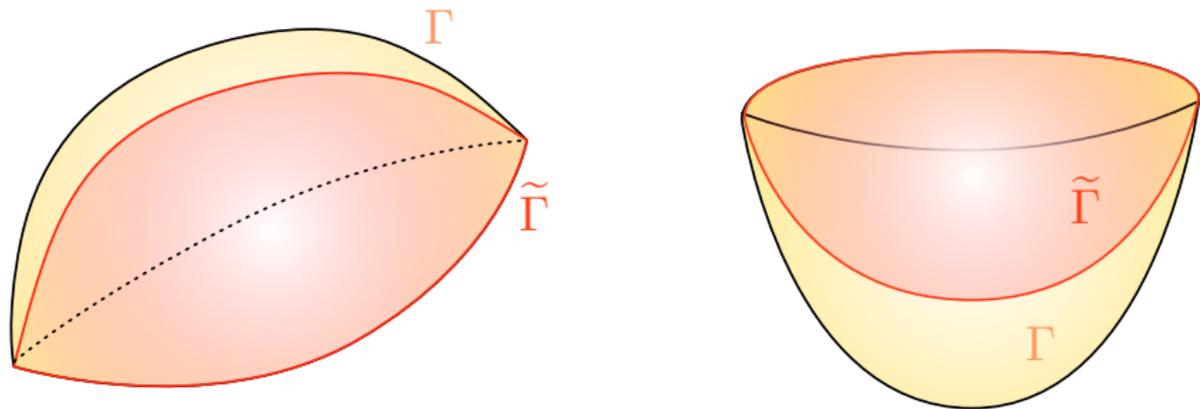
## La courbure d'une surface (II)

- À l'ordre 2 au voisinage de  $p \in \Gamma$ , la surface  $\Gamma$  possède une courbure dans chaque direction tangente.
- Les **directions principales** en  $p$  sont les directions  $v_1(p)$  et  $v_2(p)$  associées à la plus petite et la plus grande courbure  $\kappa_1(p)$  et  $\kappa_2(p)$ .
- La **courbure moyenne**  $\kappa(p)$  est la somme  $\kappa(p) = \kappa_1(p) + \kappa_2(p)$ .



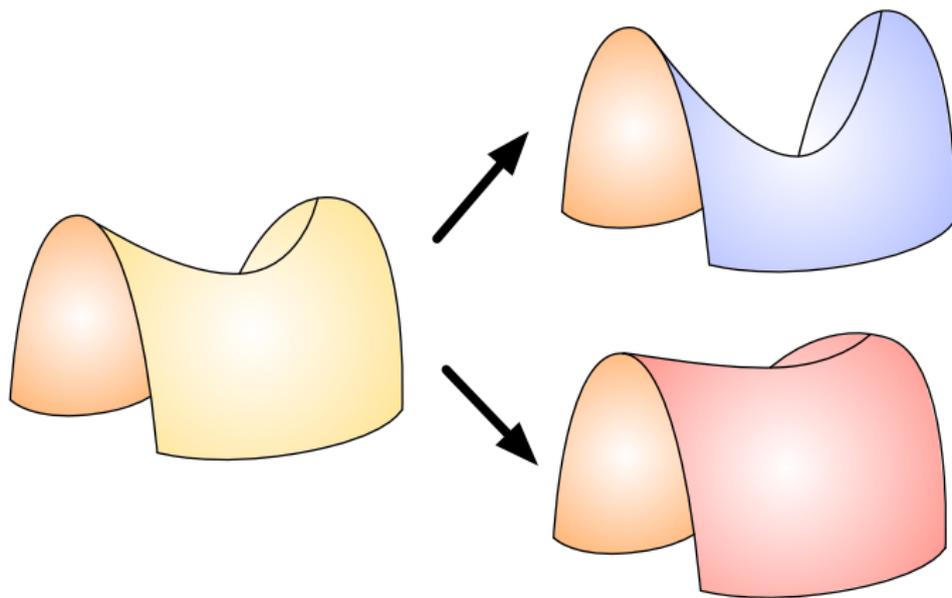
## Surfaces minimales et courbure moyenne (I)

Les surfaces minimales ont une **courbure moyenne nulle**.



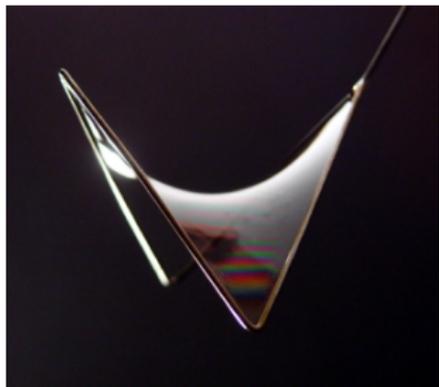
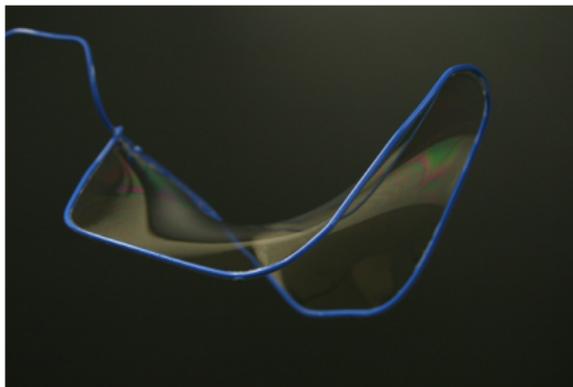
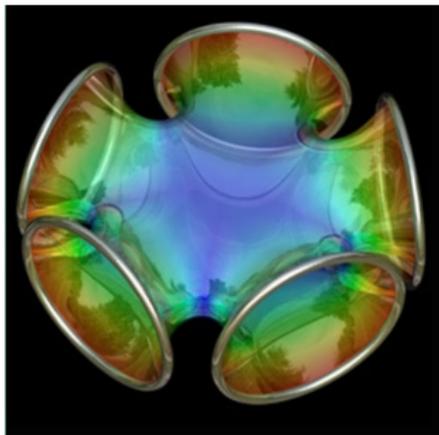
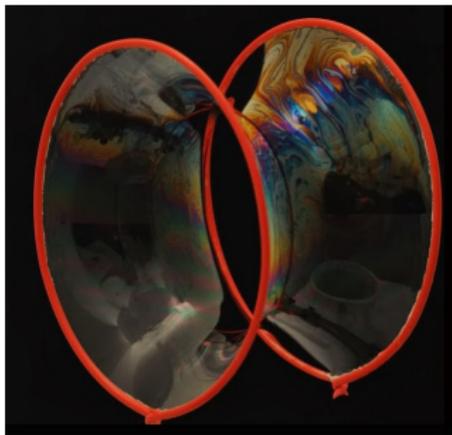
(Gauche) On diminue localement l'aire d'une surface convexe en l'abaissant ; (droite) on diminue localement l'aire d'une surface concave en la 'rehaussant'.

## Surfaces minimales et courbure moyenne (II)



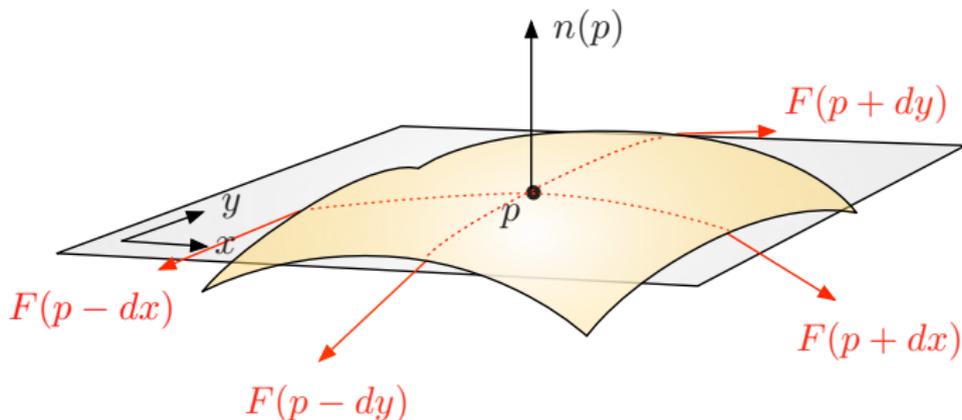
*L'aire est approximativement inchangée lorsqu'on 'abaisse' ou 'rehausse' une surface de courbure moyenne nulle.*

# Des surfaces minimales dans la nature : les films de savon



## Explication physique: la tension de surface

- Des molécules de même nature s'attirent mutuellement sous l'effet des **forces de cohésion**.
- En l'absence de forces extérieures, une surface est en équilibre lorsque la résultante des forces de cohésion, la **tension superficielle** s'annule.



- Tous calculs faits, ceci implique :  $\kappa = 0$ .

## 1 Introduction

## 2 Quelques exemples historiques et concrets

- Le problème de Didon et l'inégalité isopérimétrique
- Les surfaces minimales
- **Optimisation de formes en architecture**
- Des formes optimales dans la nature (I) : pavages optimaux
- Des formes optimales dans la nature (II) : la forme des hématies

## 3 Quelques outils modernes d'optimisation de formes

- L'optimisation de fonctions réelles
- Existence de formes optimales
- Représentation numérique des formes, et calculs mécaniques
- Optimiser des formes
- Quelques applications

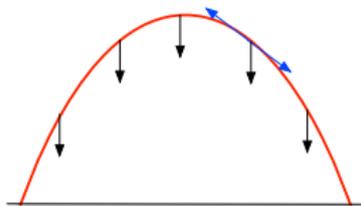
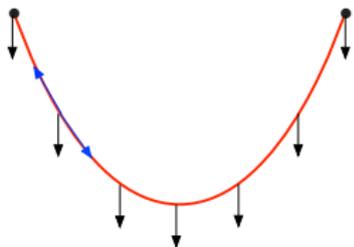
## 4 Quelques challenges

- Optimisation de formes... robuste
- La fabrication additive au secours de la complexité

## Les architectes à la recherche de la forme optimale (I)

- Depuis toujours, l'optimisation de structures est au cœur de la conception architecturale.
- Une étape cruciale vers le design moderne : le **théorème de Hooke** (1675)

*"As hangs the flexible chain, so but inverted will stand the rigid arch."*



(Gauche) Une chaîne en équilibre sous l'action de la gravité et des forces de tension ;  
(droite) une arche en équilibre sous l'action des forces de gravité et de compression.

## Les architectes à la recherche de la forme optimale (II)

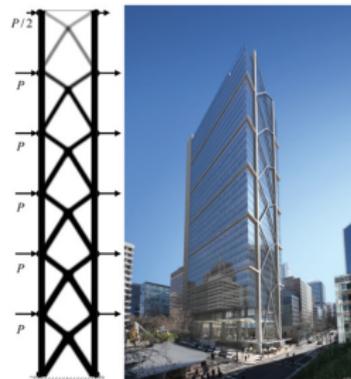
- A. Gaudi a conçu les plans de la chapelle de la Colònia Güell (1889-1914) sur la base d'un **modèle funiculaire** afin de déterminer un agencement stable de colonnes et de voûtes.



(Gauche) Le dispositif expérimental de Gaudí, (droite) maquette de la Colònia Güell (crédits photographiques : <http://www.gaudidesigner.com>).

## Les architectes à la recherche de la forme optimale (III)

- Depuis, les techniques de conception optimale ont été utilisées par des architectes de renom : Heinz Isler, Gustave Eiffel, Frei Otto, etc.
- De nos jours, les techniques récentes d'**optimisation structurale** sont couramment utilisées pour le design de bâtiments de grande taille.

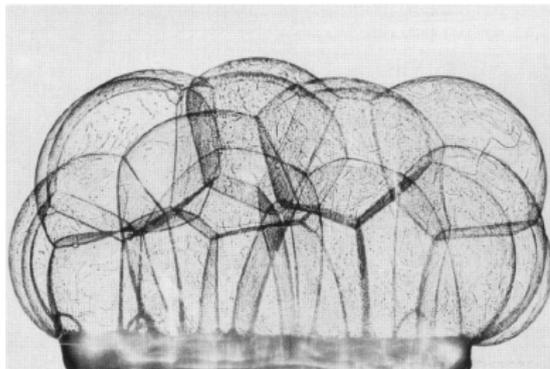


*(Gauche) La devanture du Qatar National Convention Center à Doha [Sasaki et al]. (Droite) Schéma de principe d'un gratte-ciel de 288m en Australia par Skidmore, Owings & Merrill.*

## L'optimisation de formes en architecture

Employer les concepts d'optimisation de formes dans le contexte du design architectural est alléchant :

- Ils permettent de modéliser des critères géométriques complexes en lien avec l'**esthétique**, la **constructibilité**, et la **performance mécanique** des structures.
- Les formes optimales au regard de critères mécaniques ont souvent des silhouettes 'élégantes' ; leur nature **organique** est très prisée par les architectes.



*(Gauche) Une structure en film de savon conçue par Frei Otto, (droite) vue intérieure du  
Manheim Garden festival.*

## 1 Introduction

## 2 Quelques exemples historiques et concrets

- Le problème de Didon et l'inégalité isopérimétrique
- Les surfaces minimales
- Optimisation de formes en architecture
- **Des formes optimales dans la nature (I) : pavages optimaux**
- Des formes optimales dans la nature (II) : la forme des hématies

## 3 Quelques outils modernes d'optimisation de formes

- L'optimisation de fonctions réelles
- Existence de formes optimales
- Représentation numérique des formes, et calculs mécaniques
- Optimiser des formes
- Quelques applications

## 4 Quelques challenges

- Optimisation de formes... robuste
- La fabrication additive au secours de la complexité

## Des formes optimales dans la nature (I)

- Les **alvéoles** construites par les abeilles pour stocker le miel, le pollen ou le couvain sont de forme **hexagonale**.



- Leur taille commune doit être comparable aux dimensions d'une abeille.
- La production de la **cire** constituant leurs parois est très coûteuse.

## Des formes optimales dans la nature (I)

- En d'autres termes, les abeilles se posent le problème suivant :

Quelle est la meilleure **subdivision du plan  $\mathbb{R}^2$**  en cellules (pas nécessairement identiques) d'aire unité, et dont le périmètre total est minimal ?

- Cette question est attribuée au grec Zenodore (*II<sup>ème</sup>* siècle av. J.C.), ou au géomètre Pappus (*IV<sup>ème</sup>* siècle ap. J.C.), qui avait déjà conjecturé que la **structure hexagonale** est optimale.
- Charles Darwin (*XIX<sup>ème</sup>* siècle ap. J.C.) conjectura également l'optimalité de la structure hexagonale. Il y vit une preuve du mécanisme de **sélection naturelle** : les abeilles qui utilisent le moins de cire pour construire leur ruche l'emportent.

## Le théorème du nid d'abeille

Il fallut néanmoins attendre 1999 pour voir une preuve rigoureuse de ce fait !

Plus précisément, s'appuyant sur des outils modernes (et difficiles !) de géométrie, T. Hales a montré :

### Théorème 1.

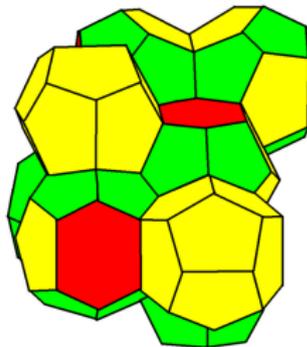
*Soit  $\Gamma$  un réseau de  $\mathbb{R}^2$  formé de morceaux de courbes régulières, divisant  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  en une union  $C$  de composantes connexes d'aire unité. Alors :*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{|\ell(\Gamma \cap B(0, r))|}{|B(0, r)|} \geq 12^{\frac{1}{4}},$$

*avec égalité si et seulement si  $\Gamma$  est le réseau hexagonal.*

## La conjecture de Kelvin

- L'analogie 3d de ce problème, la **conjecture de Kelvin**, reste un problème ouvert.
- Lord Kelvin conjectura que le pavage de l'espace par des **octaèdres tronqués** (possédant 14 faces, dont 8 sont hexagonales, et 6 sont carrées) est optimal.
- En 1994, Weaire et Phelan ont prouvé que tel n'est pas le cas en exhibant une structure dont la performance est meilleure.



*(Gauche) L'octaèdre tronqué de Lord Kelvin, (droite) la structure de Weaire-Phelan.*

## 1 Introduction

## 2 Quelques exemples historiques et concrets

- Le problème de Didon et l'inégalité isopérimétrique
- Les surfaces minimales
- Optimisation de formes en architecture
- Des formes optimales dans la nature (I) : pavages optimaux
- Des formes optimales dans la nature (II) : la forme des hématies

## 3 Quelques outils modernes d'optimisation de formes

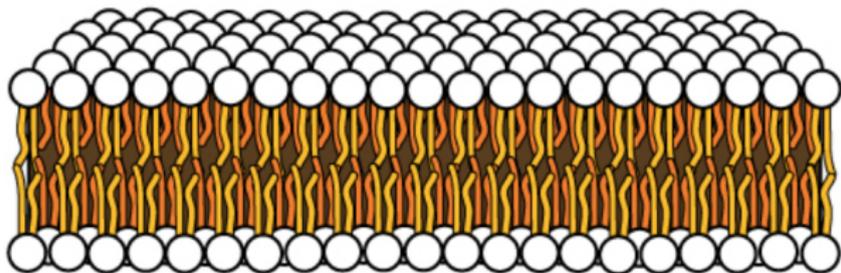
- L'optimisation de fonctions réelles
- Existence de formes optimales
- Représentation numérique des formes, et calculs mécaniques
- Optimiser des formes
- Quelques applications

## 4 Quelques challenges

- Optimisation de formes... robuste
- La fabrication additive au secours de la complexité

## Des formes optimales dans la nature (II)

- La membrane des **vésicules** ou des **hématies** est constituée de lipides dont la tête est hydrophile et la queue hydrophobe.
- Ces lipides s'assemblent ainsi en une **bicouche lipidique**, d'épaisseur  $2\delta$ .



## Des formes optimales dans la nature (II)

Chaque molécule de lipide tâche de résoudre le problème :

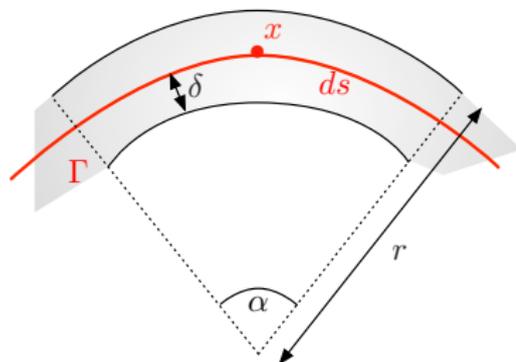
$$\min_{\Omega} W(\Omega), \text{ s. c. } \begin{cases} \text{Vol}(\Omega) = V_0, \\ \text{Per}(\Omega) = P_0, \end{cases}$$

où:

- $W(\Omega) = \int_{\partial\Omega} |\kappa|^2 dx$  est l'**énergie de Willmore**; ici
  - $\kappa(x)$  est la courbure moyenne de la surface au point  $x \in \partial\Omega$ ;
- $\text{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega} dx$  est le **volume** de fluide contenu par la cellule;
- $\text{Per}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} ds$  est l'**aire** de la membrane (qui est fonction de la quantité de molécules de lipides constituant la membrane).

## Justification physique en dimension 2

- Au voisinage de  $x \in \Gamma$ ,  $\Gamma$  ressemble à une **portion de cercle** de rayon  $r = 1/\kappa(x)$ , d'angle  $\alpha$ .
- Les couches intermédiaire et de niveau  $\pm\delta$  sont des élastiques
  - De **longueur à vide**  $\ell_0 = r\alpha$  (approximation due à la forte raideur de la membrane, et à sa faible épaisseur).
  - De **raideur**  $k$  : la force nécessaire pour allonger de  $\Delta\ell$  un morceau de longueur  $\ell_0$  est  $k\frac{\Delta\ell}{\ell_0}$ .

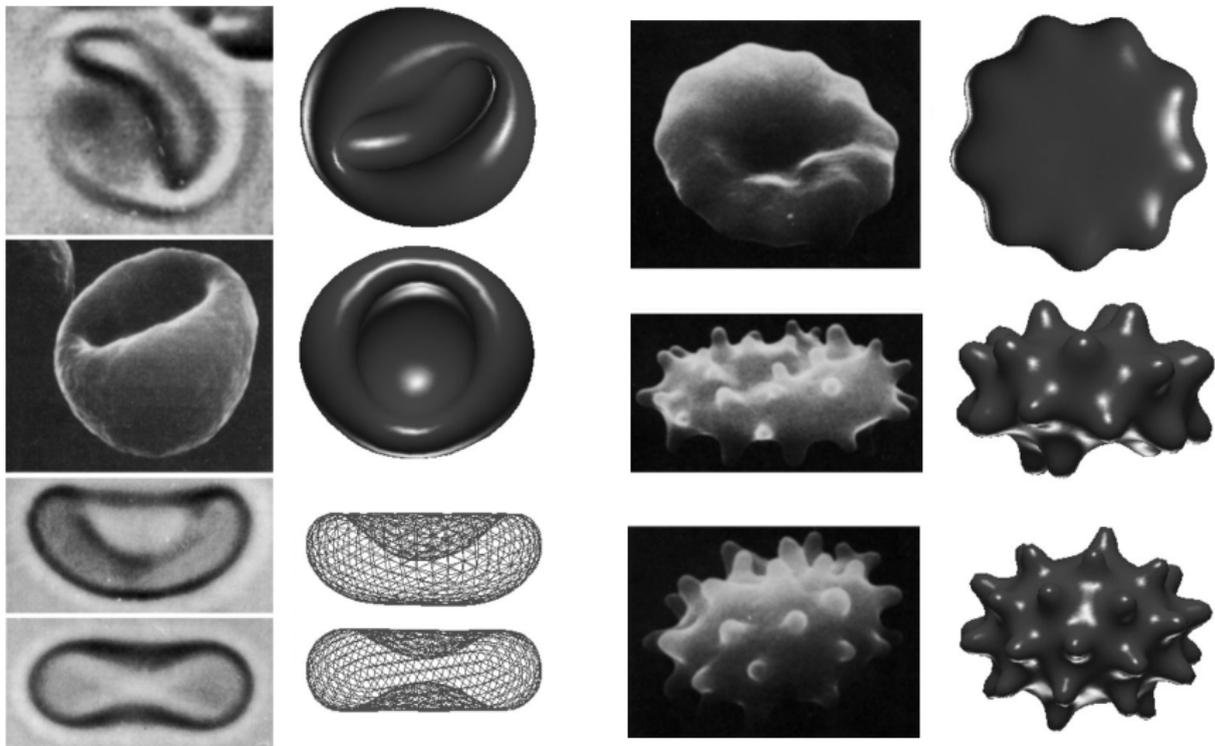


- L'**énergie potentielle** de la couche de niveau  $\pm\delta$  vaut :

$$\frac{k}{2\ell_0^2}((r \pm \delta)\alpha - \ell_0)^2 = \frac{k}{2\ell_0^2}\delta^2\alpha^2 = \frac{k\delta^2}{2r^2}.$$

- L'énergie de la membrane est donc proportionnelle à  $\delta^2 \int_{\Gamma} \kappa^2(x) ds(x)$ .

## Des formes optimales dans la nature (II)

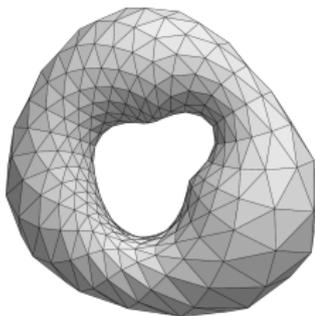
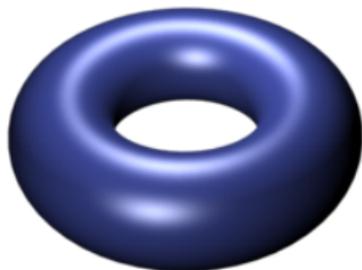


*Globules rouges observés et formes optimales calculées correspondantes pour quelques jeux de données physiologiques.*



- Des calculs menés dans des configurations particulières ont amené T. Willmore à formuler la conjecture suivante (1965) :

Tout **tore**  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  a une énergie de Willmore  $W(\Omega) \geq 2\pi^2$ .



Un **tore** de  $\mathbb{R}^3$  est une surface comportant un trou.

- Une preuve de cette conjecture a été annoncée en 2012, et publiée en 2014 par **Fernando Codá-Marques** et **André Neves**.

## Vers l'optimisation 'moderne'

- Les exemples précédents ont historiquement permis de comprendre beaucoup de choses d'un point de vue mathématique.
- Ils ont motivé et accompagné le développement du **calcul des variations**, un pan des mathématiques qui étudie la minimisation de fonctionnelles dont la variable est une fonction.
- La plupart des exemples précédents reposent sur la simplification d'un critère physique : on est ramené à optimiser un critère sur la géométrie de la forme, sous des contraintes s'appliquant à cette géométrie.
- Bien souvent, malheureusement, une telle simplification n'est pas possible, ou bien beaucoup trop grossière.

## 1 Introduction

## 2 Quelques exemples historiques et concrets

- Le problème de Didon et l'inégalité isopérimétrique
- Les surfaces minimales
- Optimisation de formes en architecture
- Des formes optimales dans la nature (I) : pavages optimaux
- Des formes optimales dans la nature (II) : la forme des hématies

## 3 Quelques outils modernes d'optimisation de formes

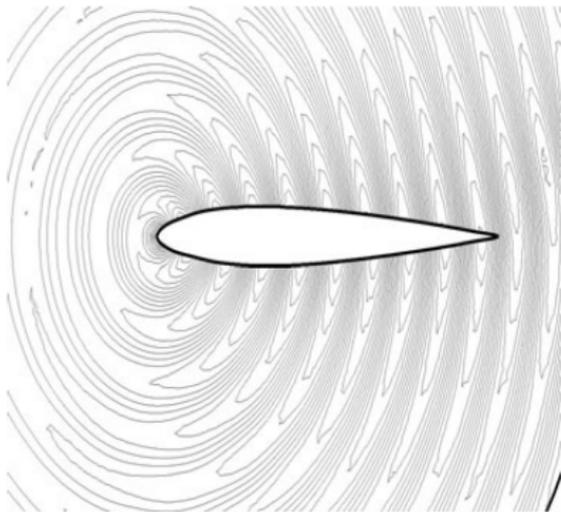
- L'optimisation de fonctions réelles
- Existence de formes optimales
- Représentation numérique des formes, et calculs mécaniques
- Optimiser des formes
- Quelques applications

## 4 Quelques challenges

- Optimisation de formes... robuste
- La fabrication additive au secours de la complexité

## Exemple I : Optimisation de la forme d'une aile d'avion

- L'aile d'un avion en vol est sujette à la réaction de l'air.
- La composante verticale de cette réaction est la **portance** : elle permet à l'avion de voler.
- Sa composante horizontale, la **traînée**, s'oppose au mouvement.
- Une réduction, même infime, de la traînée permet des économies substantielles de carburant.
- C'est un problème étudié depuis les années 1970.



*Coupe 2d d'une aile d'avion [MoPir].*

## Exemple II : Optimisation d'une poutre cantilever

- Une poutre attachée sur une partie de sa surface reçoit un chargement sur une autre partie de celle-ci.
- On souhaite que la poutre soit aussi **robuste** et **légère** que possible.



(Gauche) Un pont en cantilever ; (droite) une formation en cantilever dans le jeu 'Jenga' !

## Le problème général

Un problème d'optimisation de formes s'écrit:

$$\min_{\Omega \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} J(\Omega) \text{ s. c. } P(\Omega) \leq \alpha,$$

où:

- $J(\Omega)$  est une fonction de **coût** ou fonction objectif,
- $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  est l'ensemble des formes admissibles,
- $P(\Omega)$  est une fonction de **contrainte**.

Bien souvent,  $J(\Omega)$  (et  $P(\Omega)$ ) dépend de  $\Omega$  par l'intermédiaire d'un **problème physique** posé sur  $\Omega$ :

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} j(u_{\Omega}) dx.$$

De tels problèmes sont modélisés par des **équations aux dérivées partielles** (EDP).

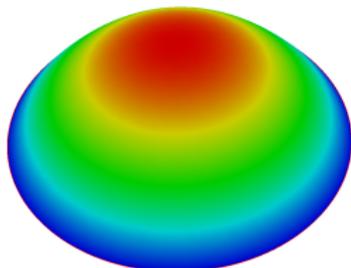
## Un exemple d'EDP: l'équation de conductivité

- $\Omega$  est une enceinte, remplie d'un matériau de conductivité thermique  $\alpha$ , dont le bord est maintenu à température 0.
- Une source de chaleur  $f$  agit dans le milieu.
- $u_\Omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est la distribution de température dans le domaine  $\Omega$ .

- L'Équation de Poisson pour  $u$  s'écrit :

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u_\Omega = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  est le Laplacien de  $u$ .

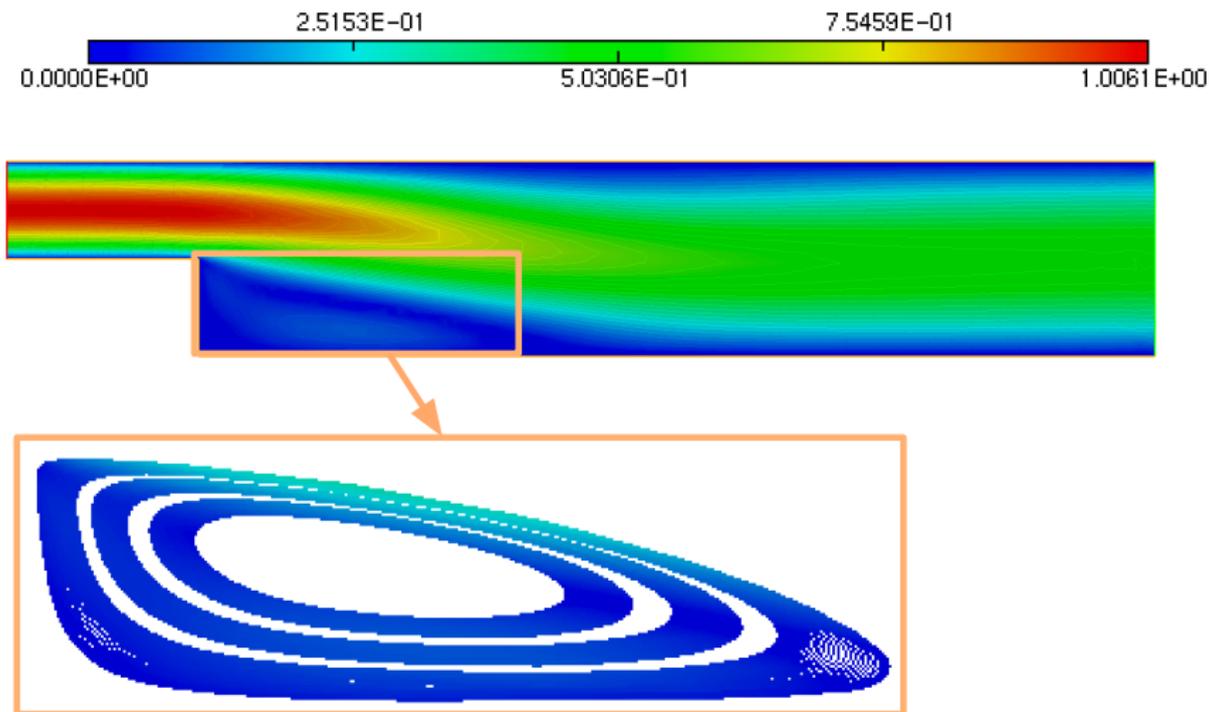


## Un exemple d'EDP: l'équation de Navier-Stokes (I)

- $\Omega$  est une **conduite**, traversé par un fluide de **viscosité**  $\nu$ .
- Le comportement du fluide est décrit par :
  - Sa **vitesse**  $u_\Omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  ;
  - Sa **pression**  $p_\Omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .
- La vitesse du fluide  $u_{\text{in}}$  à l'entrée de la conduite est connue.
- Les champs  $u_\Omega$  et  $p_\Omega$  sont solution des **équations de Navier-Stokes** :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u_\Omega}{\partial t} - \nu \Delta u_\Omega + (u_\Omega \cdot \nabla) u_\Omega + \nabla p_\Omega = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u_\Omega = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u_\Omega = u_{\text{in}} & \text{sur } \Gamma_{\text{in}}, \\ \sigma(u_\Omega, p_\Omega)n = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{out}}. \end{array} \right.$$

## Un exemple d'EDP: l'équation de Navier-Stokes (II)



*Profil de vitesse pour un écoulement stationnaire de Navier-Stokes dans une conduite.*

## Généralités et difficultés (II)

L'étude théorique et numérique des problèmes d'optimisation de formes soulève de nombreuses difficultés :

1. Ces problèmes ont-ils une solution ?
2. Comment représenter numériquement les formes ?
3. Comment calculer numériquement la solution  $u_\Omega$  d'un problème physique (d'une EDP) sur une forme  $\Omega$  ?
4. Comment déformer les formes numériquement ?
5. Comment les déformer de sorte à faire décroître l'objectif ?

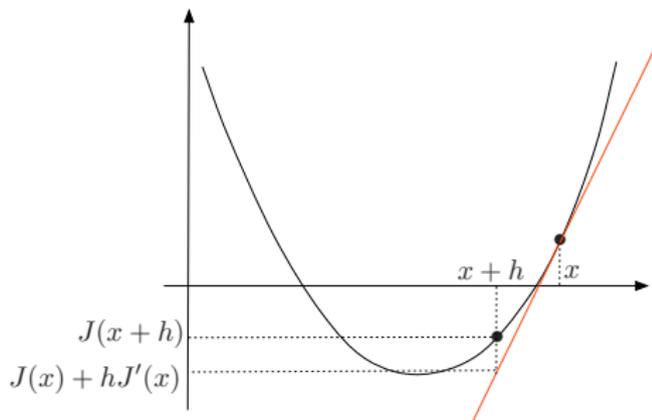
- 1 Introduction
- 2 Quelques exemples historiques et concrets
  - Le problème de Didon et l'inégalité isopérimétrique
  - Les surfaces minimales
  - Optimisation de formes en architecture
  - Des formes optimales dans la nature (I) : pavages optimaux
  - Des formes optimales dans la nature (II) : la forme des hématies
- 3 Quelques outils modernes d'optimisation de formes
  - **L'optimisation de fonctions réelles**
  - Existence de formes optimales
  - Représentation numérique des formes, et calculs mécaniques
  - Optimiser des formes
  - Quelques applications
- 4 Quelques challenges
  - Optimisation de formes... robuste
  - La fabrication additive au secours de la complexité

## De l'optimisation des fonctions réelles (I)

- Considérons le problème d'optimisation

$$\min_{x \in \mathbb{R}} J(x),$$

où  $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .



- Une classe de méthodes pour résoudre ce problème repose sur la **dérivée**  $J'(x)$ , en effet, pour une **perturbation**  $h$  de  $x$  assez 'petite',

$$J(x+h) \approx J(x) + J'(x)h.$$

- Ainsi, si  $\tau$  est un pas de temps assez petit, on voit que, pour le choix de perturbation  $h = -J'(x)$ :

$$J(x + \tau h) \approx J(x) - \tau J'(x)^2 + o(h) < J(x).$$



## De l'optimisation des fonctions réelles (III)

- Ces méthodes sont **locales** : elles convergent vers un **minimum local** de  $f$ , 'proche' du point de départ  $x_0$ .
- Beaucoup d'autres méthodes sont possibles, locales (méthode du second ordre de Newton, méthodes de quasi-Newton, etc...) comme globales (algorithmes génétiques) ou probabilistes (méthodes de Monte-Carlo).
- On peut aussi ajouter des contraintes au problème (par exemple,  $x \in [0, 1]$ ).
- Lorsque le problème est posé sur un espace de **grande dimension** ( $\mathbb{R}^d$ , avec  $d$  grand) ou de dimension infinie au lieu de  $\mathbb{R}$ , les seules méthodes envisageables sont les méthodes locales.
- Celles-ci reposent sur la **dérivée** de la fonction objectif  $f(x)$ .
- L'optimisation est un pan des mathématiques à part entière !

## 1 Introduction

## 2 Quelques exemples historiques et concrets

- Le problème de Didon et l'inégalité isopérimétrique
- Les surfaces minimales
- Optimisation de formes en architecture
- Des formes optimales dans la nature (I) : pavages optimaux
- Des formes optimales dans la nature (II) : la forme des hématies

## 3 Quelques outils modernes d'optimisation de formes

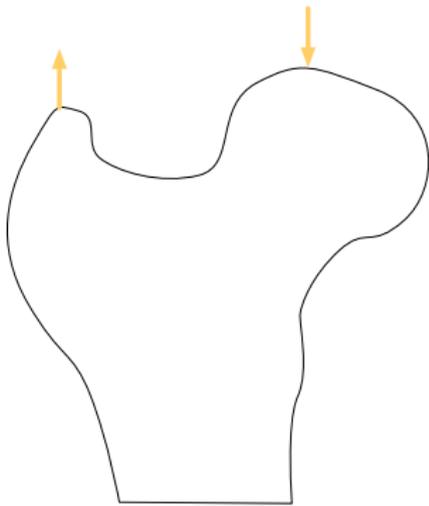
- L'optimisation de fonctions réelles
- **Existence de formes optimales**
- Représentation numérique des formes, et calculs mécaniques
- Optimiser des formes
- Quelques applications

## 4 Quelques challenges

- Optimisation de formes... robuste
- La fabrication additive au secours de la complexité

## Le phénomène d'homogénéisation

- Un problème d'optimisation de formes peut très bien **ne pas avoir de solution**.
- L'une des raisons possibles est que l'on peut souvent améliorer la performance d'une forme en créant des motifs **de plus en plus petits**.
- Dans certains contextes, ce phénomène est appelé **homogénéisation**.



*Les os ont une structure poreuse, qui maximise leur robustesse pour un poids minimal.*

## Non existence pour une ailette de refroidissement (I)

- Les **ailettes de refroidissement** visent à augmenter la surface de contact d'un dispositif avec un **fluide réfrigérant** afin d'accélérer son refroidissement.
- On en trouve de toute sorte, dans les microprocesseurs, les radiateurs de voitures, etc.



*(Gauche) Ailette de refroidissement greffée sur un microprocesseur ; (droite) ailettes de refroidissement sur la machinerie d'une voiture de course.*

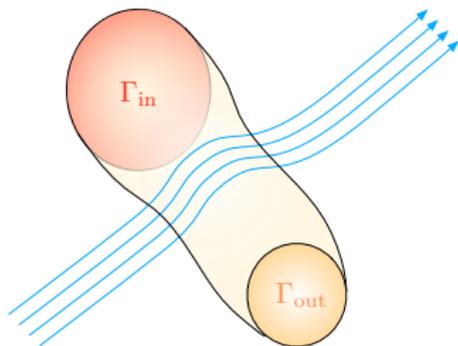
## Non existence pour une ailette de refroidissement [MaNaPri] (II)

On maximise le **flux de chaleur** entrant dans l'ailette  $\Omega$  :

$$J(\Omega) = -\alpha \int_{\Gamma_{\text{in}}} \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial n} ds,$$

où  $u_{\Omega}$  est la **température**, solution de:

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u_{\Omega} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_{\Omega} = T_0 & \text{sur } \Gamma_{\text{in}}, \\ \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{out}}, \\ \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial n} + hu_{\Omega} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$



On ajoute au problème une contrainte

- Sur le **volume**  $\text{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega} dx$  de l'ailette  $\Omega$ ;
- Ou bien sur sa **surface latérale**  $\text{Per}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} ds$ .

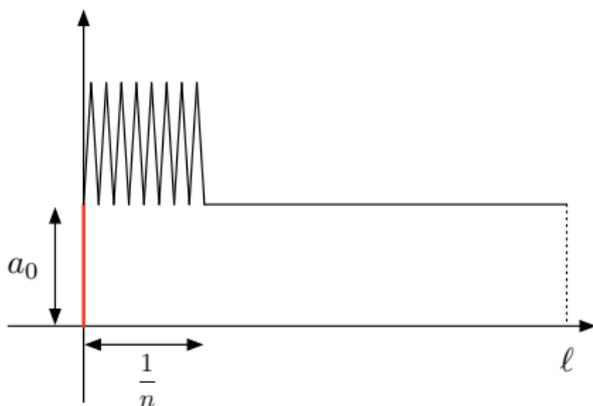
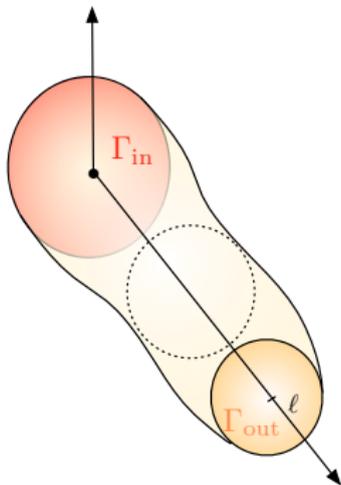
## Non existence pour une ailette de refroidissement (III)

Le problème

$$\max_{\Omega} J(\Omega) \text{ s.c. } \text{Vol}(\Omega) \leq V_0$$

n'a **pas de solution** : il existe une suite  $\Omega_n$  telle que :

$$\text{Vol}(\Omega_n) \leq V_0 \text{ et } J(\Omega_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \text{ (et } \text{Per}(\Omega_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \text{)}.$$



La suite  $\Omega_n$  d'ailettes axisymétriques présente  $n$  oscillations sur une région à distance  $\frac{1}{n}$  du bord d'entrée  $\Gamma_{in}$ .

## Non existence pour une ailette de refroidissement (III)

Ceci fait écho à la forme des **radiateurs**, dont on cherche à maximiser la surface de contact avec le milieu extérieur.

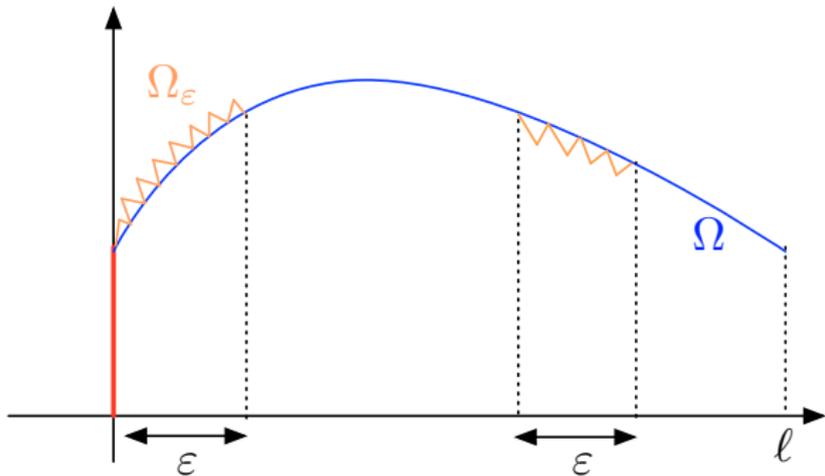


## Non existence pour une ailette de refroidissement (III)

Le problème

$$\max_{\Omega} J(\Omega) \text{ s.c. } \text{Per}(\Omega) \leq S_0$$

n'a **pas de solution** non plus : on peut améliorer chaque forme en créant de 'petites oscillations' proches de l'entrée (mais  $\sup_{\text{Per}(\Omega) \leq S_0} J(\Omega) < \infty$ ).



L'ailette  $\Omega_\epsilon$ , construite à partir de  $\Omega$  en créant de petites oscillations près de l'entrée et dans une autre région de sorte que  $\text{Per}(\Omega_\epsilon) = \text{Per}(\Omega)$  a une meilleure performance que  $\Omega$ .

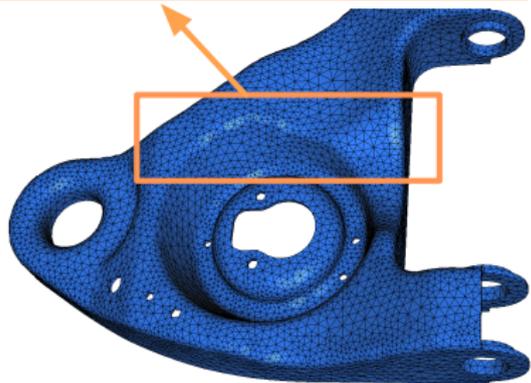
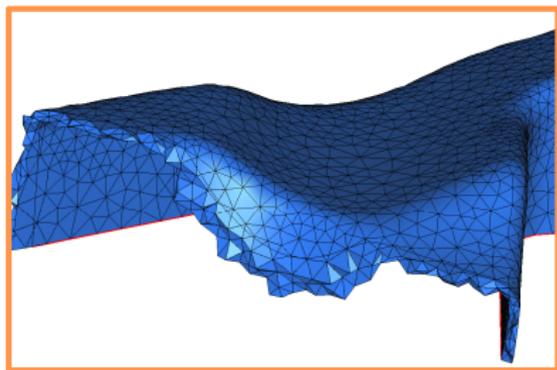
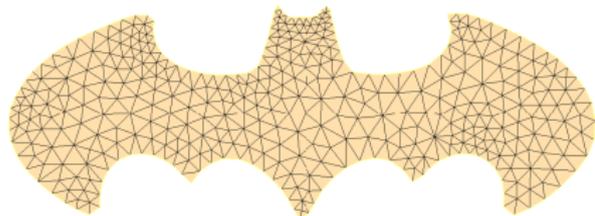
## Le phénomène d'homogénéisation

- En général, un problème d'optimisation de formes n'a **pas de solution**.
- Lorsque c'est le cas, de possibles remèdes sont:
  - **Restriction** : On restreint l'ensemble  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  des formes admissibles afin d'éliminer celles qui ont de trop petites oscillations.
  - **Relaxation** : On **élargit** l'ensemble  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  afin d'y inclure des formes 'micro-oscillantes'.
- D'un point de vue pratique et numérique, ce phénomène implique l'existence de nombreux **minima locaux** pour les problèmes d'optimisation de formes.
- Heureusement, on est bien souvent intéressé par la calcul d'un **minimum local**, proche de la forme initiale (e.g. du design pensé par le bureau d'étude).

- 1 Introduction
- 2 Quelques exemples historiques et concrets
  - Le problème de Didon et l'inégalité isopérimétrique
  - Les surfaces minimales
  - Optimisation de formes en architecture
  - Des formes optimales dans la nature (I) : pavages optimaux
  - Des formes optimales dans la nature (II) : la forme des hématies
- 3 Quelques outils modernes d'optimisation de formes
  - L'optimisation de fonctions réelles
  - Existence de formes optimales
  - **Représentation numérique des formes, et calculs mécaniques**
  - Optimiser des formes
  - Quelques applications
- 4 Quelques challenges
  - Optimisation de formes... robuste
  - La fabrication additive au secours de la complexité

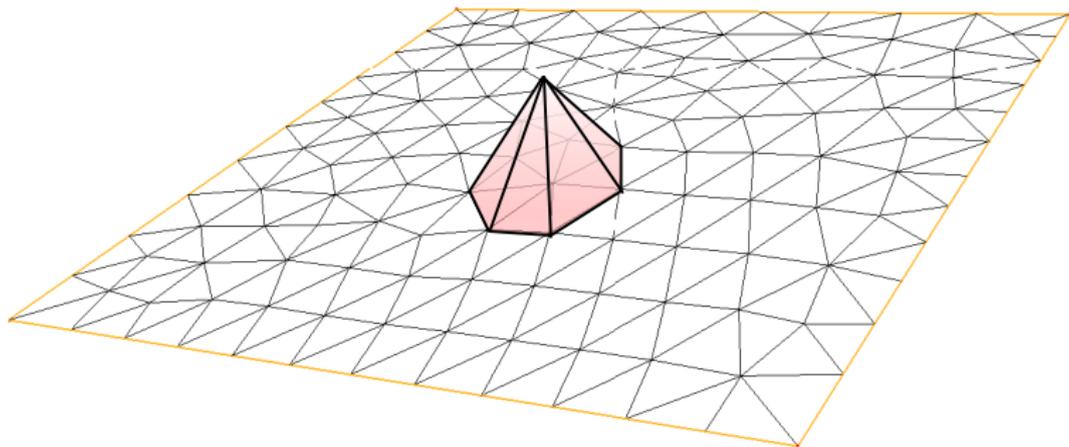
## Un zoom sur la méthode des éléments finis (I)

On **discrétise** souvent un domaine  $\Omega$  en utilisant un **maillage**, i.e. une subdivision de  $\Omega$  en de petites unités élémentaires : triangles en 2d, tétraèdres en 3d, ...



## Un zoom sur la méthode des éléments finis (II)

On introduit une base  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  de fonctions d'**éléments finis** sur ce maillage, par exemple, des fonctions affines en restriction à chaque triangle ou tétraèdre.



$\varphi_i$  vaut 1 sur le  $i^{\text{ème}}$  nœud du maillage, et 0 sur les autres.

## Un zoom sur la méthode des éléments finis (III)

On recherche alors (une approximation de) la solution  $u$  d'une EDP telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

sous forme d'une combinaison linéaire des fonctions de base :

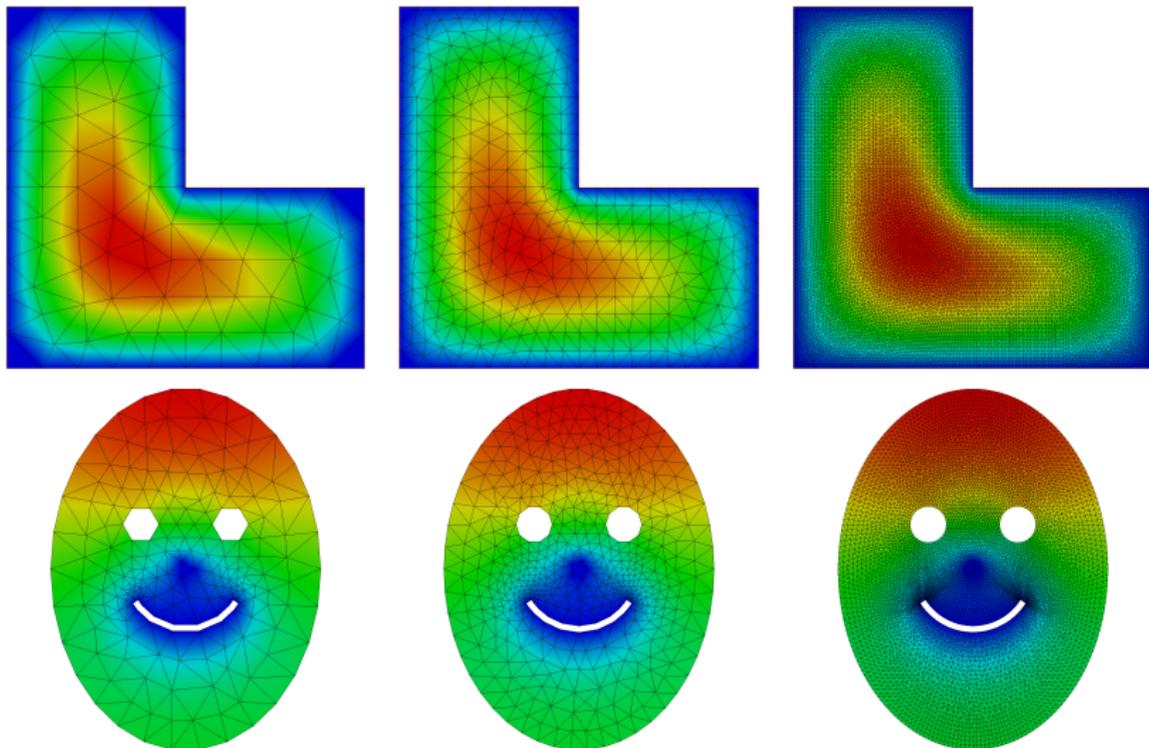
$$u \approx \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i.$$

Cette EDP est alors convertie en un  **système linéaire**  :

$$KU = F,$$

où  $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$  est le vecteur d'inconnues.

## Un zoom sur la méthode des éléments finis (IV)



*Quelques résolutions par éléments finis, sur différents domaines, avec différents maillages.*

## 1 Introduction

## 2 Quelques exemples historiques et concrets

- Le problème de Didon et l'inégalité isopérimétrique
- Les surfaces minimales
- Optimisation de formes en architecture
- Des formes optimales dans la nature (I) : pavages optimaux
- Des formes optimales dans la nature (II) : la forme des hématies

## 3 Quelques outils modernes d'optimisation de formes

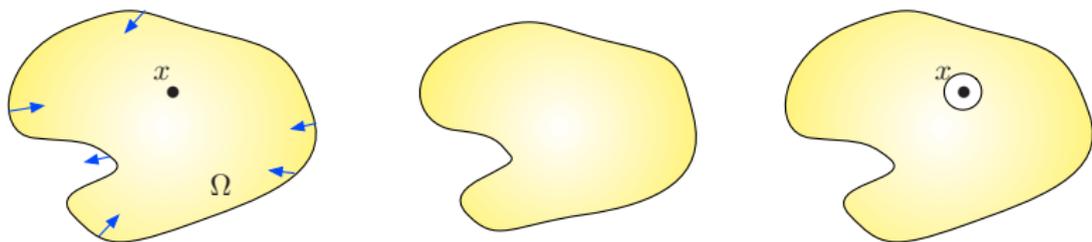
- L'optimisation de fonctions réelles
- Existence de formes optimales
- Représentation numérique des formes, et calculs mécaniques
- **Optimiser des formes**
- Quelques applications

## 4 Quelques challenges

- Optimisation de formes... robuste
- La fabrication additive au secours de la complexité

## ... à l'optimisation de formes (I)

- Afin d'adapter l'**algorithme de gradient** à l'optimisation de formes, on doit se donner une manière de **dériver**  $\Omega \mapsto J(\Omega)$  **par rapport au domaine**.
- Pour ce faire, on procède en deux temps :
  1. On effectue des **perturbations** arbitrairement 'petites' d'une forme donnée  $\Omega$ .
  2. On dérive en 0 par rapport à ces perturbations.
- Il y a plusieurs façons de faire, utilisant différents types de perturbations de  $\Omega$ .



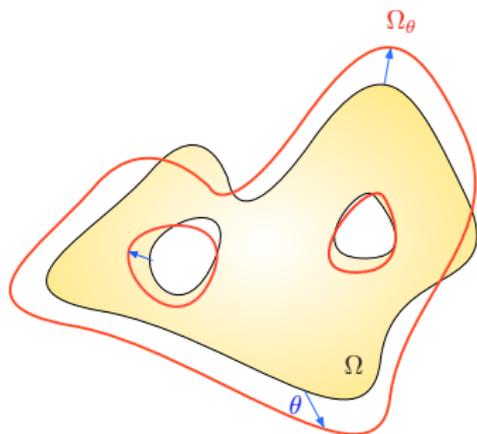
*Comment faire des perturbations de  $\Omega$  ? (Centre) Déplacer sa frontière ? (Droite) Forer un petit trou centré en  $x$  ?*

## Dérivée de forme : la méthode de Hadamard (I)

- On se donne un **domaine de référence**  $\Omega$ .
- On considère des **variations** de  $\Omega$  de la forme

$$\Omega_\theta = (\text{Id} + \theta)(\Omega),$$

où  $\theta$  est un 'petit' **champ de vecteurs**.



### Definition 1.

Une fonction  $F(\Omega)$  du domaine est **différentiable** en  $\Omega$  si l'application sous-jacente

$$\theta \mapsto F(\Omega_\theta)$$

est différentiable en  $\theta = 0$ , i.e. on a le développement de Taylor, pour  $\theta$  petit :

$$F(\Omega_\theta) \approx F(\Omega) + F'(\Omega)(\theta).$$

## Dérivée de forme : la méthode de Hadamard (II)

**Exemple 1:** La fonction de **volume**  $F(\Omega) = \text{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega} dx$ .

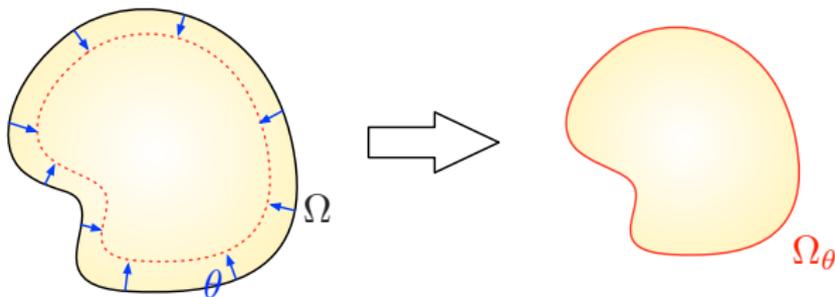
On peut calculer la **dérivée de forme** :

$$F'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n \, ds.$$

Intuition : En suivant la direction  $\theta = -n$ , on voit que, pour  $\tau > 0$  'petit' :

$$F((\text{Id} + \tau\theta)(\Omega)) \approx F(\Omega) + \tau F'(\Omega)(\theta) < F(\Omega),$$

puisque  $F'(\Omega)(\theta) = -\int_{\partial\Omega} ds < 0$ .



*Pour faire décroître son volume, il faut 'compresser'  $\Omega$ .*

## Dérivée de forme : la méthode de Hadamard (III)

**Exemple 2:** La fonction de **périmètre**  $F(\Omega) = \text{Per}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} ds$

On peut prouver que sa **dérivée de forme** s'écrit :

$$F'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \kappa \theta \cdot n \, ds,$$

où  $\kappa : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est la **courbure moyenne** de  $\Omega$ .

Intuition : Une forme de périmètre (localement) minimal vérifie  $\kappa = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

*En effet*, si c'était faux, en faisant  $\theta = -\tau\kappa n$  pour  $\tau > 0$  petit, on aurait

$$F((\text{Id} + \tau\theta)(\Omega)) \approx F(\Omega) + \tau F'(\Omega)(\theta) < F(\Omega),$$

puisque  $F'(\Omega)(\theta) = -\int_{\partial\Omega} \kappa^2 ds < 0$ .

⇒ On retrouve que les surfaces minimales ont une courbure moyenne nulle !

## Dérivée de forme : la méthode de Hadamard (IV)

- Les fonctions du domaine  $F(\Omega)$  qui nous intéressent sont **très compliquées** : elles dépendent de  $\Omega$  par l'intermédiaire d'un **problème physique** sur  $\Omega$ .
- Des techniques élaborées permettent de calculer leur dérivée de forme.
- Celle-ci a toujours la **structure** :

$$F'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} v\theta \cdot n \, ds,$$

pour une certaine fonction  $v : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que l'on peut calculer.

- On en déduit une **direction de descente**, i.e. une manière de faire bouger  $\Omega$  pour diminuer la valeur de  $F(\Omega)$ .

$$\text{Avec } \theta = -vn, F((\text{Id} + \tau\theta)(\Omega)) \approx F(\Omega) - \tau \int_{\partial\Omega} v^2 \, ds < F(\Omega).$$

## Un algorithme d'optimisation de formes (I)

- **Initialisation** : Un design  $\Omega_0$ , par exemple donné par le bureau d'études.
- **Itérations** : Pour  $n = 0, \dots$

1. Calculer la dérivée de forme  $J'(\Omega_n)(\theta)$  en  $\Omega_n$ .
2. En déduire une **direction de descente** pour  $J$ , i.e.  $\theta_n$  tel que

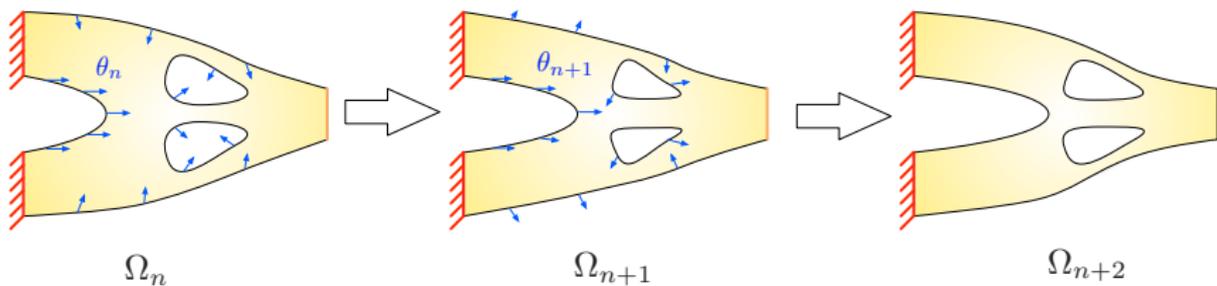
$$J'(\Omega_n)(\theta_n) < 0.$$

3. **Mettre à jour**  $\Omega_n$  : pour  $\tau_n$  'petit'

$$\Omega_{n+1} = (\text{Id} + \tau_n \theta_n)(\Omega_n).$$

- **Arrêt** : lorsque  $\Omega_{n+1}$  et  $\Omega_n$  sont 'très proches'.

## Un algorithme d'optimisation de formes (II)



*Quelques itérations d'un algorithme type d'optimisation de formes.*

## 1 Introduction

## 2 Quelques exemples historiques et concrets

- Le problème de Didon et l'inégalité isopérimétrique
- Les surfaces minimales
- Optimisation de formes en architecture
- Des formes optimales dans la nature (I) : pavages optimaux
- Des formes optimales dans la nature (II) : la forme des hématies

## 3 Quelques outils modernes d'optimisation de formes

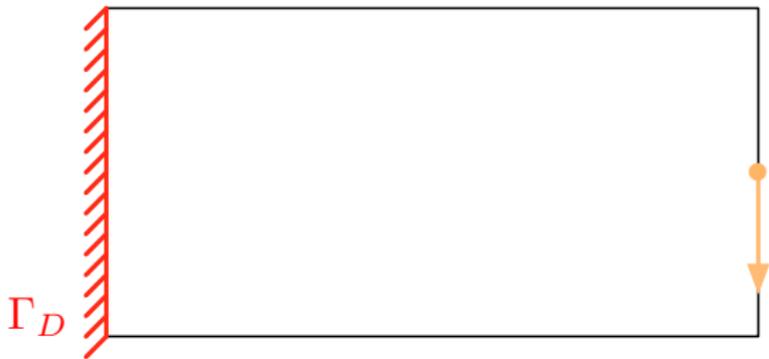
- L'optimisation de fonctions réelles
- Existence de formes optimales
- Représentation numérique des formes, et calculs mécaniques
- Optimiser des formes
- Quelques applications

## 4 Quelques challenges

- Optimisation de formes... robuste
- La fabrication additive au secours de la complexité

## Optimisation d'une poutre cantilever (I)

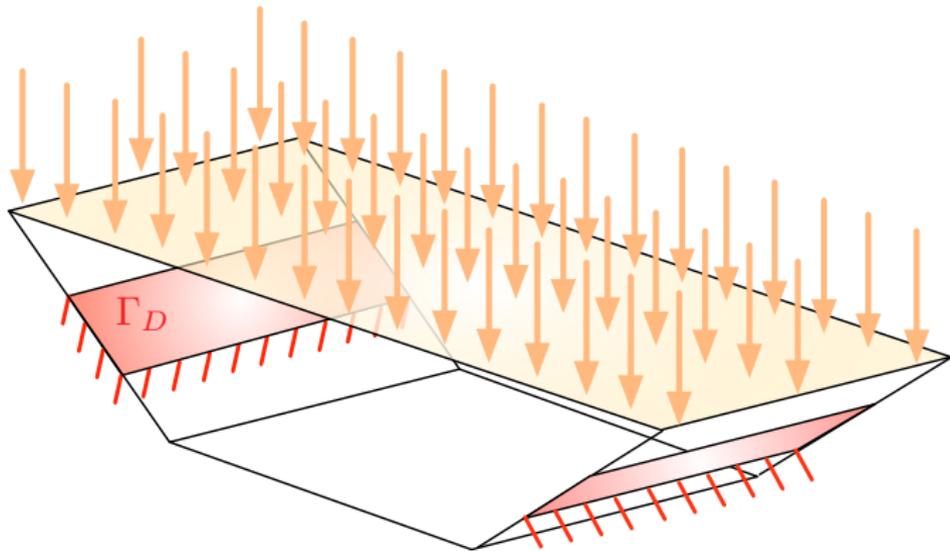
- Une **poutre**  $\Omega$  est attachée sur une partie  $\Gamma_D$  de sa frontière ;
- Des efforts sont appliqués sur une autre partie de sa frontière ;
- Le comportement physique de la poutre obéit aux lois de l'**élasticité linéaire** ;
- On minimise la **compliance** (i.e. souplesse) de  $\Omega$  sous une **contrainte de volume**.



## Optimisation d'une poutre cantilever (II)

## Optimisation de la forme d'un pont (I)

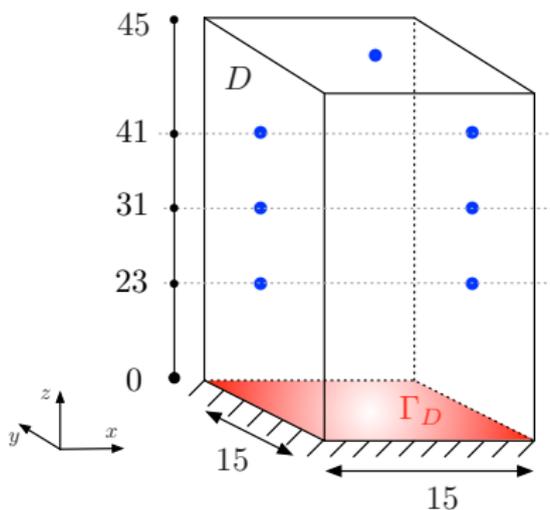
- Un pont  $\Omega$  est fixé sur une partie  $\Gamma_D$  de sa frontière.
- Des efforts verticaux sont appliqués sur le tablier (piétons, véhicules, etc.).
- Le comportement physique du pont obéit aux lois de l'**élasticité linéaire**.
- On minimise la **compliance** (i.e. souplesse) de  $\Omega$  sous une **contrainte de volume**.



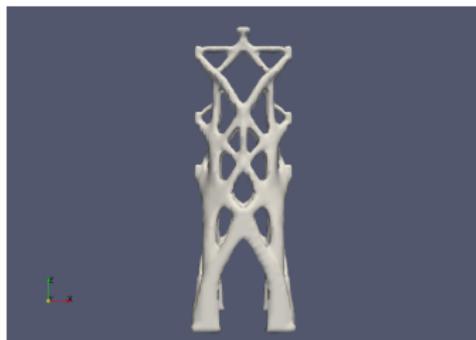
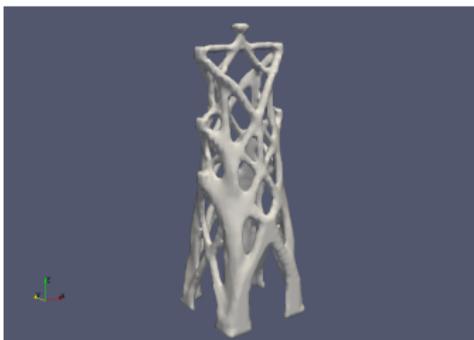
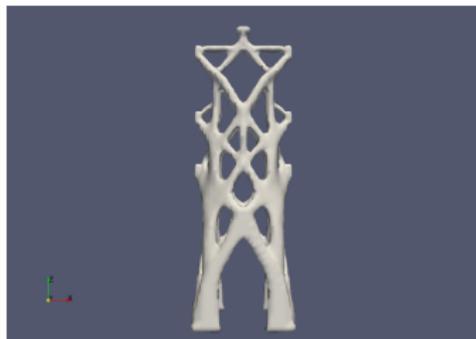
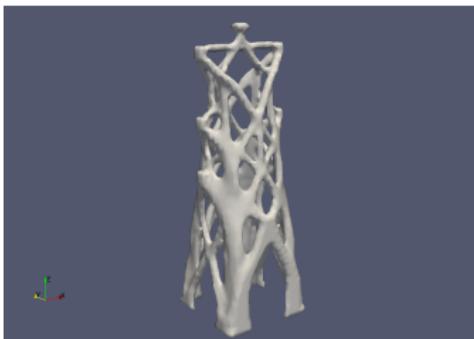
## Optimisation de la forme d'un pont (II)

## Optimisation de la forme d'un pylône (I)

- Un pylône  $\Omega$  est fixé sur une partie  $\Gamma_D$  de sa frontière ;
- Plusieurs scénarii de chargements sont possibles en fonction des conditions du milieu ambiant (vent, etc.) ;
- Le comportement physique de  $\Omega$  est régi par les lois de l'élasticité linéaire ;
- On minimise la **compliance moyenne** de  $\Omega$  (i.e. par rapport aux différents cas de chargement) sous une **contrainte de volume**.



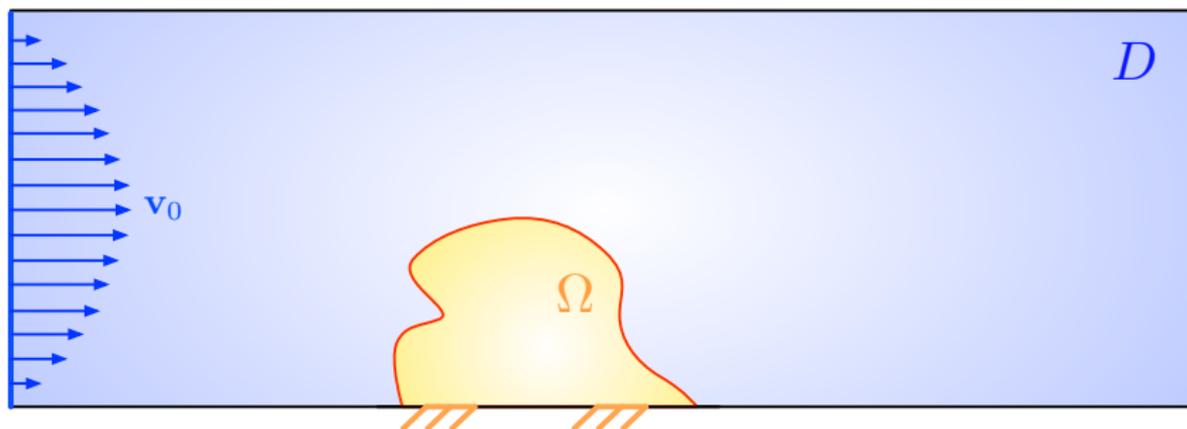
## Optimisation de la forme d'un pylône (II)



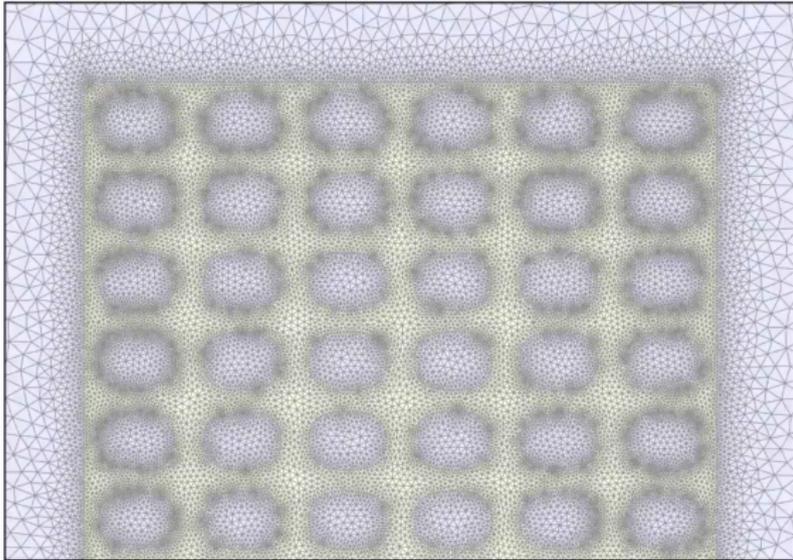
*(Haut / bas) Deux pylônes optimisés, sujets à différentes contraintes.*

## Un exemple en mécanique des fluides (I)

- Un fluide s'écoule dans une conduite  $D$ , avec un profil d'entrée donné.
- Un obstacle  $\Omega$  occupe la conduite, qui contient une partie non optimisable ;
- Le fluide obéit aux **équations de Navier-Stokes**, et le solide aux équations de l'**élasticité linéarisée** ;
- On minimise le **travail du fluide** sur  $\Omega$  sous une **contrainte de volume**.



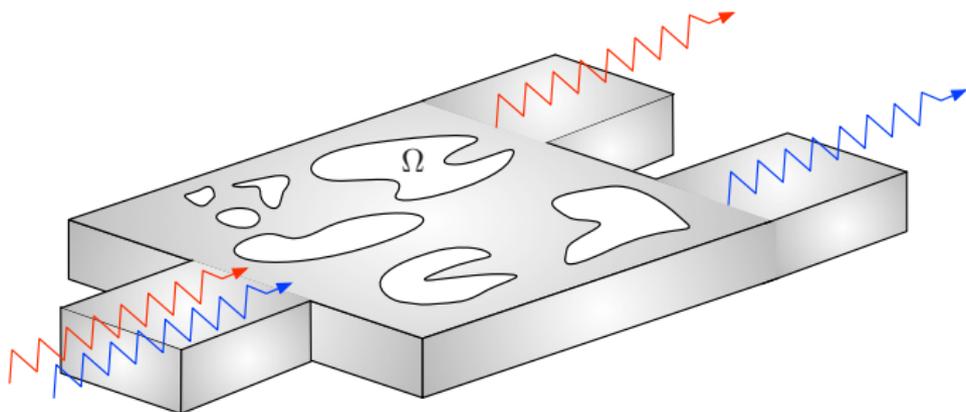
## Un exemple en mécanique des fluides (II)



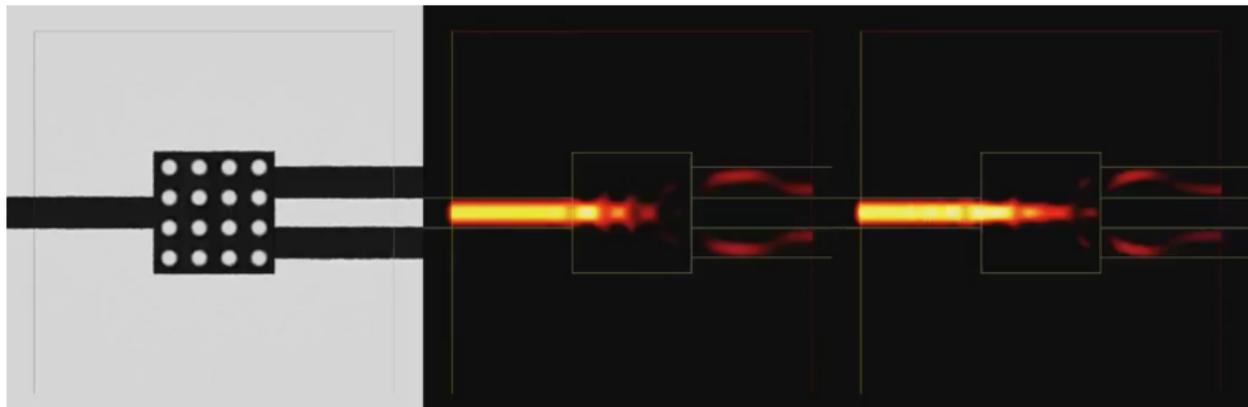
*Optimisation du renforcement d'une colonne soumise à la pression d'un fluide (Remerciements : Florian Feppon).*

## Un exemple en électromagnétisme (I)

- Une onde lumineuse traverse un guide d'onde.
- Ses **champs électrique** et **magnétique** obéissent aux **équations de Maxwell**.
- Un **demultiplexer** a pour but de diriger l'onde entrante dans des directions différentes en fonction de sa longueur d'onde.
- Comment jouer sur la forme  $\Omega$  des **inclusions de silice** dans le demultiplexer pour imposer ce comportement ?



## Un exemple en électromagnétisme (II)



*Optimisation de la forme d'un demultiplexer (Remerciements : Nicolas Lebbe).*

## 1 Introduction

## 2 Quelques exemples historiques et concrets

- Le problème de Didon et l'inégalité isopérimétrique
- Les surfaces minimales
- Optimisation de formes en architecture
- Des formes optimales dans la nature (I) : pavages optimaux
- Des formes optimales dans la nature (II) : la forme des hématies

## 3 Quelques outils modernes d'optimisation de formes

- L'optimisation de fonctions réelles
- Existence de formes optimales
- Représentation numérique des formes, et calculs mécaniques
- Optimiser des formes
- Quelques applications

## 4 Quelques challenges

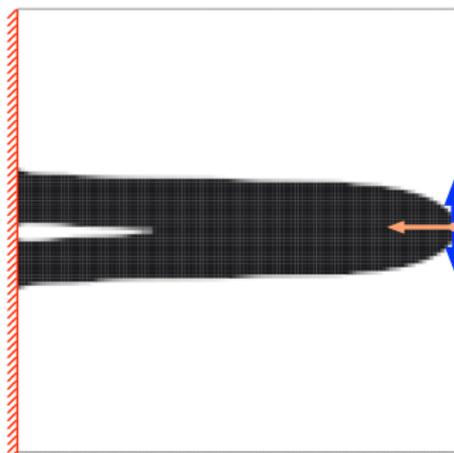
- **Optimisation de formes... robuste**
- La fabrication additive au secours de la complexité

## Questions de robustesse

- Les situations physiques dans lesquelles on optimise une forme dépendent de **données** :
  - L'intensité des forces qui s'exercent sur une structure élastique ;
  - L'endroit où elles s'appliquent ;
  - La longueur d'onde d'une onde que l'on conduit par un guide ;
  - La viscosité d'un fluide traversant un tuyau ;
- Souvent, ces données sont seulement mesurées ou estimées, de manière imprécise.
- Il est donc naturel de demander qu'une forme soit **robuste** par rapport à de petites perturbations de ces paramètres.

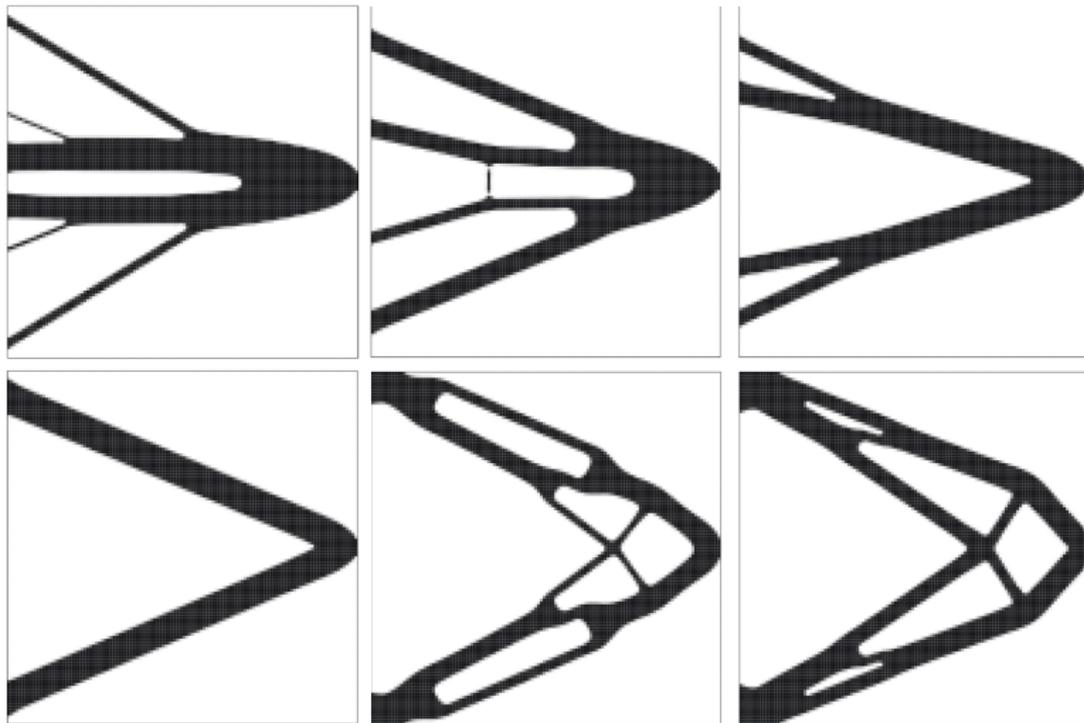
## Un exemple très particulier [deGAIJou] (I)

- Une poutre cantilever est soumise à un chargement horizontal.
- De 'petites' perturbations verticale sont attendues quant à ce chargement.
- On optimise sa forme sous une contrainte de volume.
- Il s'agit d'une situation très particulière, où la prise en compte des incertitudes est grandement simplifiée.



*Forme optimisée sans tenir compte de l'incertitude sur le chargement.*

## Un exemple très particulier [deGAIJou] (II)



*Forme optimisée de la poutre cantilever avec des incertitudes de plus en plus fortes sur la composante verticale du chargement.*

## 1 Introduction

## 2 Quelques exemples historiques et concrets

- Le problème de Didon et l'inégalité isopérimétrique
- Les surfaces minimales
- Optimisation de formes en architecture
- Des formes optimales dans la nature (I) : pavages optimaux
- Des formes optimales dans la nature (II) : la forme des hématies

## 3 Quelques outils modernes d'optimisation de formes

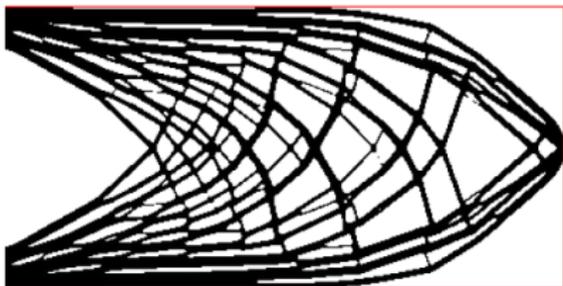
- L'optimisation de fonctions réelles
- Existence de formes optimales
- Représentation numérique des formes, et calculs mécaniques
- Optimiser des formes
- Quelques applications

## 4 Quelques challenges

- Optimisation de formes... robuste
- La fabrication additive au secours de la complexité

## Les difficultés liées au processus de fabrication

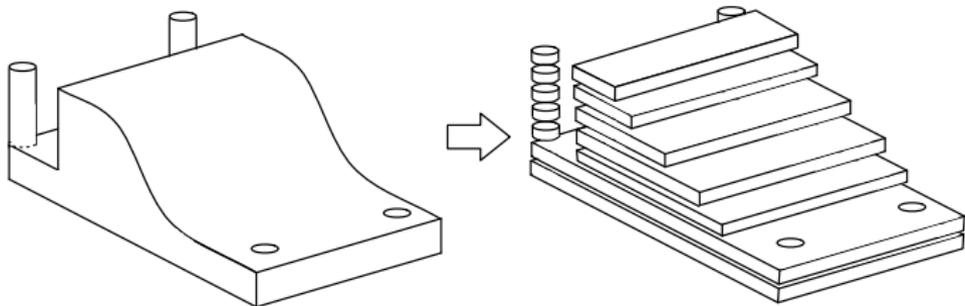
- Les formes optimisées sont souvent **trop complexes** pour être usinées par des techniques traditionnelles (extrusion de matière, fonderie, etc) ; par exemple :
  - Elles présentent de fines barres, susceptibles de casser lors de la fabrication,
  - Elles contiennent des zones de forte épaisseur, où le refroidissement de la matière fondue est difficile.
- Un enjeu d'actualité est modéliser les contraintes sur la forme optimisée  $\Omega$  imposées par le processus de fabrication,
- Les techniques récentes de **fabrication additive** (**impression 3d**) pourraient permettre une plus grande liberté dans les designs constructibles.



(Gauche) Une forme 'optimisée' ; (droite) une forme construite par fabrication additive.

## La fabrication additive en bref (I)

- Toutes les technologies de **fabrication additive** démarrent par une étape de **slicing** : la forme est décomposée en une série de **couches horizontales**.
- Ces couches 2d sont construites successivement, grâce au procédé choisi.



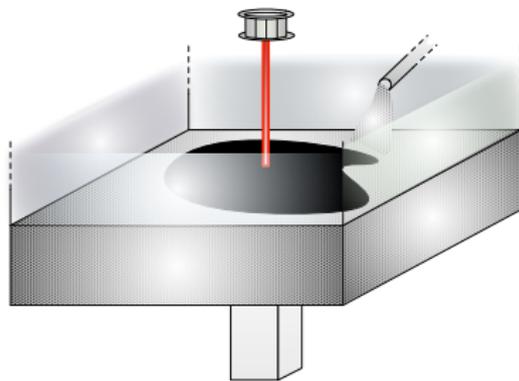
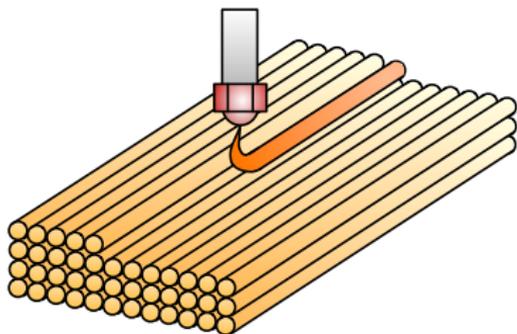
*La procédure de **slicing**, au principe de toutes les techniques de fabrication additive.*

- En principe, il est possible de construire des formes 'arbitrairement' complexes.

## La fabrication additive en bref (II)

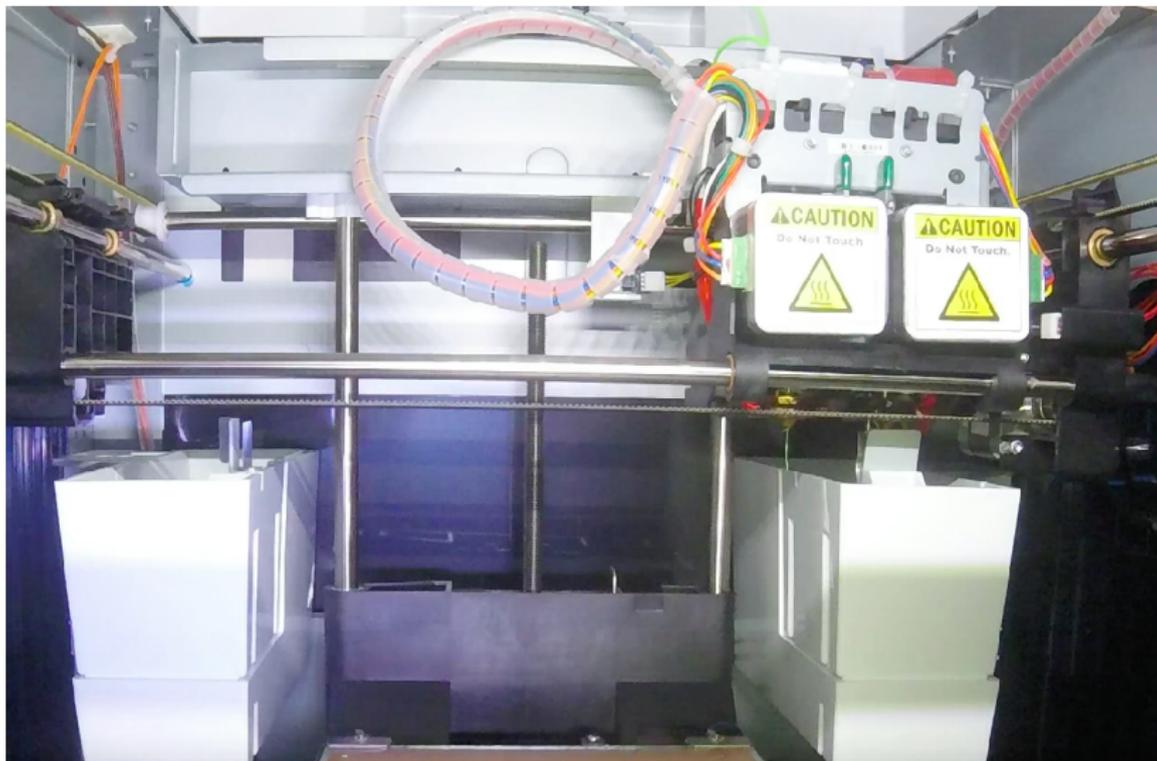
Deux des technologies de fabrication additive les plus répandues sont :

- **Les méthodes par extrusion de matière** (e.g. FDM) : elles agissent par **dépôt** d'un filament de polymère (plastique) fondu sous forme de trames.
- **Les méthodes par fusion de poudre** (e.g. EBM, SLS) sont principalement utilisées pour traiter les **métaux**. La construction de chaque couche 2d débute par l'étalement de poudre métallique dans la chambre de construction, puis un laser la porte sélectivement au point de fusion.



*Schémas de principe des technologies (gauche) FDM et (droite) EBM.*

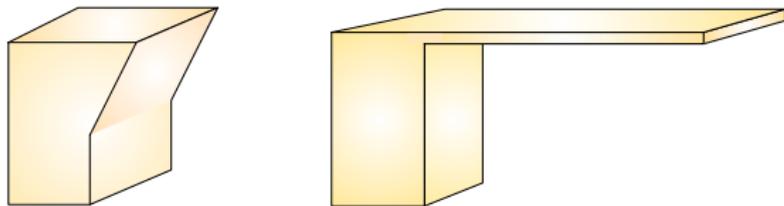
## La fabrication additive en bref (III)



*Une machine-outil utilisant le procédé FDM en action.*

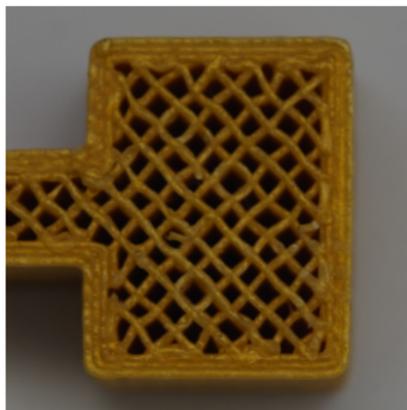
## Des problèmes inédits liés aux procédés de fabrication additive !

- Ces technologies ont des difficultés à construire des régions en **porte-à-faux**.



(Gauche) Un 'petit' et (droite) un 'grand' porte-à-faux.

- Les matériaux produits par fabrication additive n'ont pas exactement les **propriétés physiques** prévues par la théorie.



Une couche 2d d'une structure produite par EDM.

Merci pour votre attention !

## References I

-  [All] G. Allaire, *Conception optimale de structures*, Mathématiques & Applications, **58**, Springer Verlag, Heidelberg (2006).
-  [All] G. Allaire, *Analyse Numérique et Optimisation*, Éditions de l'École Polytechnique, (2012).
-  [AllJou] G. Allaire, *Design et formes optimales (I), (II) et (III)*, Images des Mathématiques (2009).
-  [Be] P. Berard, *Surfaces minimales*, Exposé pour la fête des sciences, (2012); disponible à l'adresse <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/D/surfaces-minimales-beamer.pdf>.
-  [Can] I. Cantat, *Le globule rouge*, Images des Mathématiques, (2012).
-  [Go] M. Goldman, *De Didon à Lena en passant par Euler et Lagrange : une invitation au calcul des variations*, Lycée Dumont d'Urville, (2013); disponible à l'adresse <https://www.ljll.math.upmc.fr/~goldman/talks.html>.

## References II

-  [deGAIJou] F. de Gournay, G. Allaire et F. Jouve, *Shape and topology optimization of the robust compliance via the level set method*, ESAIM: COCV, 14, (2008), pp. 43–70.
-  [Ha] J. Hadamard, *Sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées*, Mémoires présentés par différents savants à l'Académie des Sciences, 33, no 4, (1908).
-  [He] F. Hecht, *FreeFem++ : un logiciel libre pour la résolution d'EDP par la méthode des éléments finis*, (2012) ; disponible à l'adresse <https://www.freefem.org/ff++>.
-  [Klo] B. Kloeckner, *L'inégalité isopérimétrique*, Images des Mathématiques, (2009).
-  [HilTrom] S. Hildebrandt et A. Tromba, *Mathématiques et formes optimales : L'explication des structures naturelles*, Pour la Science, (2009).
-  [Lou] D. Louapre, *La science étonnante*, blog, <https://sciencetonnante.wordpress.com/>.

## References III

-  [MaNaPri] G. Marck, G. Nadin et Y. Privat, *What is the optimal shape of a fin for one dimensional heat conduction?* , SIAM J. Applied Math 74 (2014), no. 4, 1194–1218.
-  [MoPir] B. Mohammadi et O. Pironneau, *Applied shape optimization for fluids*, 2nd edition, Oxford University Press, (2010).
-  [MuSi] F. Murat et J. Simon, *Sur le contrôle par un domaine géométrique*, Technical Report RR-76015, Laboratoire d'Analyse Numérique (1976).
-  [Pri] Y. Privat, *La forme optimale des neurones*, Les dossiers de la recherche, no. 5, juillet 2013, pages 18-20.