Exercice sur le théorème des extréma liés

Exercice.

a) Soit n un entier supérieur à 2. On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i$ et on pose :

$$\Gamma = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

Étudier le maximum global de la restriction de f à Γ, $f_{|\Gamma}$. Retrouver l'inégalité arithmético-géométrique.

b) Soit n un entier supérieur à 2 et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres réels strictement positifs. On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i^2$ et on pose :

$$\Gamma = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{x_i^4}{\lambda_i^4} = 1 \right\}.$$

Étudier le maximum global de $f_{|\Gamma}$.

c) Soit n un entier supérieur à 2 et soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels strictement positifs vérifiant $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Démontrer que :

$$\prod_{i=1}^n a_i(1 - a_i) \leqslant \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}.$$

Corrigé.

a) On note $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$. L'ensemble Γ est fermé (car g continue et $\Gamma = g^{-1}(\{1\}) \cap [0, +\infty[^n$) et borné (car inclus dans $[0, 1]^n$) donc compact. La fonction f étant continue sur Γ, $f_{|\Gamma}$ admet un maximum global atteint en un point de a de Γ. Si $b \in \mathbb{R}^n$ a une coordonnée nulle alors $f(b) = 0 < 1 = f(1, \dots, 1)$ et donc, en notant $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ on a $\max f_{|\Omega} = \max f_{|\Gamma} = f(a)$.

L'ensemble Γ est une hypersurface C^∞ de $\mathbb{R}^n$ (car g est C^∞), l'ensemble Ω est ouvert de Γ (car $\Omega = \Gamma \cap]0, +\infty[^n$) et $f_{|\Omega}$ admet un extremum local en $a \in \Omega$. Donc par le théorème des extréma liés, il existe un réel λ vérifiant $\operatorname{grad} f(a) = \lambda \operatorname{grad} g(a)$. En écrivant $a = (a_1, \dots, a_n)$ on obtient pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$: $\frac{f(a)}{a_i} = \lambda$, puis, comme $f(a)$ est non nul, que tous les a_i sont égaux. Or $\sum a_i = 1$ et donc finalement $a_i = \frac{1}{n}$. Il en résulte que $\max f_{|\Gamma} = \max f_{|\Omega} = f(a) = \frac{1}{n^n}$.

Nous venons de montrer que pour tous nombres réels positifs $x_1, \dots, x_n$ vérifiant $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, on a $\prod_{i=1}^n x_i \leqslant \frac{1}{n^n}$. Soient $x_1, \dots, x_n$ sont des nombres réels positifs non tous nuls. On se ramène au cas précédent par homogénéité : on a $\sum_{i=1}^n x_i > 0$ et les nombres réels positifs $\widetilde{x_1}, \dots, \widetilde{x_n}$ avec $\widetilde{x_i} = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$ vérifient $\sum_{i=1}^n \widetilde{x_i} = 1$. Par le cas précédent : $\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^n} = \prod_{i=1}^n \widetilde{x_i} \leqslant \frac{1}{n^n}$ et finalement $\prod_{i=1}^n x_i \leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^n$. Cette inégalité est trivialement vraie si tous les x_i sont nuls. Finalement pour tous nombres réels $x_1, \dots, x_n$ on obtient

$$\left(\prod_{i=1}^n |x_i|\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

b) À chercher pour la prochaine séance !

c) À chercher pour la prochaine séance ! (et ne pas utiliser les questions a) ou b))