TD n°9. Hypersurfaces et extrema liés

1 Hypersurfaces

Exercice 1. Soient $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et $c \in \mathbb{R}$. Donner une condition suffisante pour que l'ensemble $G^{-1}(c)$ soit une hypersurface de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Montrer que la sphère $S = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2\}$, avec $a > 0$, est une hypersurface de $\mathbb{R}^n$. Expliciter son plan tangent en tout point $(x_1, \cdots, x_n) \in S$.

Exercice 3. On considére le cône $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$

a) Montrer que C privé de l'origine est une hypersurface, calculer son plan vectoriel tangent.

b) Montrer que C n'est pas une hypersurface. (Aide : montrer que l'ensemble des vecteurs « tangents » en 0 n'est pas inclus dans un hyperplan vectoriel).

Exercice 4. Montrer que l'ensemble de $\mathbb{R}^3$

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : xy + xz + 2x + 2y - z = 0\}$$

est une hypersurface de $\mathbb{R}^3$ au voisinage de 0. Donner l'équation du plan tangent à cette hypersurface.

Exercice 5. Soit C le cylindre défini par $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = x\}$. Montrer que C est une hypersurface et calculer son espace tangent en un point.

2 Extrema liés

Exercice 6. Soient α, β et γ trois nombres réels. Déterminer le maximum et le minimum sur la sphère euclidienne S de $\mathbb{R}^3$ de la fonction $f(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$.

Exercice 7.

a) Etablir l'inégalité
$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,$$
pour tous $x_i \geq 0$, et tous $\alpha_i > 0$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Quand a-t-on égalité ? On pourra rechercher le maximum du membre de gauche, fonction des x_i, sur l'ensemble défini par $\sum_i^n \alpha_i x_i = 1$.

b) En déduire comment obtenir un parallélépipède rectangle d'aire minimum et de volume donné.

Exercice 8. Soit A une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne. Montrer que le réel
$$\lambda = \sup_{\|x\|=1} (x|Ax)$$
est une valeur propre de A. On utilisera la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Exercice 9. Soit α positif. Déterminer le maximum et le minimun de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto xyz$ sur l'ensemble
$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = \alpha \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Exercice 10. Soit $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + 2y^2 + z^2 = 5 \text{ et } x^2 + y^2 - 2z = 0\}$, ϕ la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y, z) = (x^2 + 2y^2 + z^2 - 5, x^2 + y^2 - 2z)$, et f la fonction $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = y + z$.

a) Montrer que P est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer qu'en tout point m de P, le rang de la différentielle de ϕ est 2.

c) Trouver tous les points d'extrema de f et préciser leur nature.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = x + 2y + z$. Montrer que f atteint son maximum et son minimum sur $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 3z^2 = 3\}$. Déterminer ce minimum et ce maximum.

Exercice 12. Déterminer les extrema locaux de $u(x,y,z) = \sin(x)\sin(y)\sin(z)$ quand $x+y+z = \frac{\pi}{2}$ et $x, y, z > 0$.

Exercice 13. Soit q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que la quadrique Q d'équation $q(x) = 1$ est une hypersuface de $\mathbb{R}^n$.

b) Déterminer l'hyperplan tangent à Q en $x \in Q$ quelconque.

c) Étudier les extrema de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur Q.

3 Un problème de synthèse

Exercice 14.

a) On assimile $M_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$. Montrer que $(A|B) = \mathrm{Tr}(A^tB)$ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$. Tout du long nous fixons la norme qui en dérive.

b) Montrer que l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est C^∞, et calculer sa différentielle en Id, puis en tout point (en A, interviendra la comatrice A).

c) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il compact ? connexe ? connexe par arcs ?

d) Soit $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : \det M = 1\}$. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est-il compact ? connexe ? connexe par arcs ?

e) Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est une hypersurface de $\mathbb{R}^n$ et déterminer le plan tangent en Id.

f) Montrer que $\|\cdot\|$ atteint sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ un minimum global. Atteint-elle un maximum global ?

g) Minimiser $\|\cdot\|$ sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ (on pensera bien sûr aux multiplicateurs de Lagrange).