TD n°6. Différentiabilité

Exercice 1. Soient E, F deux espaces vectoriels, N_E, N'_E deux normes équivalentes sur E, et N_F, N'_F deux normes équivalentes sur F. Soit $f : E \to F$ une application que l'on suppose différentiable en un point a pour les normes N_E et N_F, et $Df(a)$ sa différentielle.
Montrer que f est aussi différentiable en a pour les normes N'_E, N'_F, avec la même différentielle.

Exercice 2.

a) Soit $f : E \to F$ une application entre deux espaces vectoriels normés, E de dimension finie, et x_0 un point de E. Quels liens logiques y a-t-il entre les propriétés suivantes ?
(i) f est différentiable en x_0,
(ii) f admet en x_0 des dérivées directionnelles suivant tout vecteur (non nul),
(iii) f admet des dérivées partielles en x_0,
(iv) f est continue en x_0,
(v) f est de classe C^1 sur un voisinage de x_0.

b) Chacune des formules suivantes définit une fonction f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, que l'on prolonge en posant $f(0,0) = 0$. Pour chacune des fonctions obtenues, répondre aux questions suivantes : l'application admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$? Des dérivées directionnelles ? Est-elle continue en $(0,0)$? Est-elle de classe C^1 au voisinage de $(0,0)$? Est-elle différentiable en $(0,0)$?

$$(i)\ \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad (ii)\ \frac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad (iii)\ \frac{x^3y}{x^4+y^2} \qquad (iv)\ \frac{xy^3}{x^4+y^2}.$$

Aide : on pourra montrer et utiliser l'inégalité $x^4 + y^2 \geq \sqrt{2}x^2 \mid y \mid$.

c) On note r et θ les coordonnées polaires sur le plan (ce sont des fonctions de x et y). Soit f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{r}{\theta} & \text{si } \theta \in]0,\pi[\\ \frac{-r}{\theta+\pi} & \text{si } \theta \in]-\pi,0[\\ 0 & \text{si } \theta = 0 \text{ ou } \pi. \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$ selon tout vecteur. Montrer cependant que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 3. Montrer que le système suivant admet une unique solution.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos(x+y) \\ y = \frac{1}{2}\sin(x-y) \end{cases}$$

Aide : on pourra penser à utiliser l'inégalité des accroissements finis puis le théorème de point fixe de Picard.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

a) Prouver que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et que $Df(x,y)$ est bijective en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

b) L'application f est-elle injective ?

Exercice 5.

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (\sin(x+y), 2xy^3, ye^x)$.
(i) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ en un point (x_0,y_0) et écrire la matrice jacobienne.
(ii) Rappeler le lien entre dérivées partielles et différentielle et donner la valeur de $Df(x_0,y_0)(\vec{h})$ pour un vecteur $\vec{h} = (h_x, h_y)$ quelconque.
(iii) Ecrire l'approximation de $f(x_0 + \vec{h})$ fournie par la différentielle et donner la version matricielle.

b) Mêmes questions pour la fonction définie par $g(a,b,c) = (2a + ab^2c^3, ae^b)$.

c) Comment obtient-on la matrice de l'application linéaires $D(f \circ g)(a,b,c)$ à partir de celles de Df et Dg ?

Exercice 6.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 1 en un point x_0. En déduire l'expression de la différentielle $Df(x_0)$ à l'aide de $f'(x_0)$.

b) Rappeler la formule donnant la différentielle de $(g \circ f)$ à l'aide des différentielles de f et g. Ecrire la formule pour f, g deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et retrouver ainsi la formule donnant la dérivée de $g \circ f$ à l'aide de celles de f et de g.

Exercice 7.

a) Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Montrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est différentiable si et seulement si elle est continue et, dans ce cas, pour tout x de E on a $Df(x) = f$.

b) Soient E, F, G des espaces vectoriels normés. Montrer qu'une application bilinéaire $f : E \times F \to G$ est différentiable si et seulement si elle est continue, et, dans ce cas, pour tout (x, y) dans $E \times F$, on a $Df(x,y) = f(x,.) + f(.,y)$.

c) (Application de la question précédente)

  i) Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{< x, x >}$, de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, est différentiable en tout x_0 non nul, et donner sa différentielle.

  ii) Montrer que cette application n'est pas différentiable en 0.

  iii) Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ une application de classe C^1. Donner une formule pour la dérivée de la fonction qui associe à t la distance de 0 à $\gamma(t)$. Interpréter géométriquement l'annulation de cette dérivée.

Exercice 8.

a) Soit E un espace de Banach, et $U(E)$ l'ouvert des applications linéaires continues inversibles. Montrer que l'application $u \mapsto u^{-1}$ est différentiable, et calculer sa différentielle en un point u_0 quelconque (on pourra commencer par le cas $u_0 = \mathrm{Id}$, et utiliser les séries).

b) Soit E un espace vectoriel normé, et k un entier (positif). On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ u & \mapsto & u^k. \end{array}$$

Montrer qu'elle est différentiable, et calculer sa différentielle.

Exercice 9. Soit $X = C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que l'application

$$f \mapsto \int_0^1 f^3(t)dt$$

de X dans $\mathbb{R}$ est différentiable, et calculer sa différentielle.

Exercice 10. On considère l'application déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

a) Calculer les dérivées partielles de cette application au point Id. En déduire la différentielle de l'application en ce point, et écrire l'approximation donnée par la différentielle.

b) Soit A_0 une matrice inversible. Déduire de la question précédente la différentielle de det en A_0.

c) Rappeler la formule donnant l'inverse à l'aide de la comatrice (ou matrice des cofacteurs).

d) Montrer que l'application det est de classe C^1.

e) Soit A_0 une matrice quelconque. En utilisant que l'ensemble des matrices inversibles est dense dans $M_n(\mathbb{R})$, en déduire la différentielle en A_0.

Exercice 11. Soit n un entier ≥ 1, on note $\|.\|_2$ la norme euclidienne standard sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On considère l'espace vectoriel E des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui sont de classe C^1. On munit E des deux normes définies de la façon suivante :

$$N_0(\gamma) = \mathrm{Sup}\{\|\gamma(t)\| \mid t \in [0,1]\}$$

et

$$N_1(\gamma) = N_0(\gamma) + N_0(\gamma').$$

Etant donnée $\gamma \in E$, on définit la longueur de γ par la formule

$$\mathrm{Long}(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_2 \, dt.$$

a) On munit ici E de la norme N_1. Soit $\gamma_0 \in E$ un vecteur non nul. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$, $\gamma \mapsto \mathrm{Long}(\gamma)$ est différentiable en γ_0 et calculer sa différentielle.

b) On munit maintenant E de la norme N_0. On veut montrer qu'avec cette norme, l'application $\gamma \mapsto \mathrm{Long}(\gamma)$ n'est même pas continue. Soit $\gamma_0 : t \mapsto (t, 0, \ldots, 0)$.

   i) Soit $\varepsilon > 0$ et M un entier. Calculer la longueur de la courbe

   $$\gamma_{\varepsilon,M} : t \mapsto \gamma_0(t) + \varepsilon(\cos(Mt), \sin(Mt)).$$

   Dessiner cette courbe pour ε très petit et M très grand.

   ii) Conclure en choisissant des valeurs de ε et de M.

Exercice 12. *Difficile, mais très joli !* On souhaite démontrer le théorème de Liapounov.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, une application de classe C^1. On suppose que $f(0) = 0$ et on note $A = Df(0)$. Le but de l'exercice est de comparer le comportement des solutions du système différentiel non linéraire :

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x. \end{cases}$$

à celui du système linéarisé au voisinage du point d'équilibre 0 :

$$\begin{cases} z' = Az \\ z(0) = x. \end{cases}$$

On suppose que toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative. On note $(.)$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $||.||$, la norme euclidienne correspondante.

a) Soient $\lambda_1, ..., \lambda_k$, les valeurs propres distinctes de A. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$||e^{tA}x|| \lesssim \Big(\sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_j)}\Big)||x||.$$

Dans le cas général (A n'est plus supposée diagonalisable), on peut montrer (en utilisant la décomposition de $\mathbb{C}^n$ en sous-espaces caractéristiques de A) qu'il existe un polynôme P tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$||e^{tA}x|| \leqslant P(|t|)\Big(\sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_j)}\Big)||x||$$

b) En déduire le comportement de z(t) lorque $t \to +\infty$. On dit que l'origine est un point d'équilibre attractif.

c) Montrer que l'inégrale donnée ci-dessous définie une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$, et que la forme quadratique associée $q(x) = b(x, x)$ (appelée fonction de Liapounov) est définie positive.

$$b(x, y) = \int_0^{+\infty} (e^{tA}x.e^{tA}y)dt.$$

d) Vérifier l'égalité :

$$grad\ q(x).Ax = 2b(x, Ax) = -||x||^2$$

Dans la suite, on admet l'existence d'une solution $y(t)$ du problème initial, définie pour tout $t \geqslant 0$. On note $r(y) = f(y) - Ay$.

e) Vérifier l'égalité
$$q'(y) = -||y||^2 + 2b(y, r(y))$$
et montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que l'inégalité $q(y) \leqslant \alpha$ entraîne
$$-||y||^2 + 2b(y, r(y)) \leqslant -\beta q(y).$$
Aide : on pourra remarquer que la forme quadratique q définit une norme. On écrira la différentiabilité de f en 0.

f) En déduire que l'inégalité $q(x) < \alpha$ entraîne $q(y(t)) \leqslant \alpha$ pour tout $t \geqslant 0$, puis en déduire (par un argument de type Gronwall) l'inégalité suivante :
$$q(y(t)) \leqslant e^{-\beta t} q(x).$$
Moralité de l'histoire : On obtient au final que la solution du système non linéraire tend exponentiellement vite vers 0. Ainsi, sous l'hypothèse de valeurs propres à partie réelle strictement négative pour $A = Df(0)$, la propriété "l'origine est un point d'équilibre attractif" se transmet du système linéaire $z' = Az$ au système non linéaire $y' = f(y)$.