TD n°5. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues

1 Sur les espaces vectoriels normés en général

Exercice 1 (Vrai ou faux ?)**.** Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, et suivant le cas, en donner une preuve ou trouver un contre-exemple.

a) L'application $N : (x, y) \mapsto |2x + 7y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b) L'application $N : P \mapsto |P(0)| + |P(1)| + |P(2)| + |P(3)|$ est une norme sur l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3.

c) Dans un espace vectoriel normé E, pour tout $v \in E$, l'application $x \mapsto x + v$ est continue.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé, et $a \in E$. Démontrer que, pour tout $r > 0$, l'adhérence de la boule ouverte $B_o(a, r)$ est la boule fermée $B_f(a, r)$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.

a) Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Montrer que si F n'est pas d'intérieur vide, alors F est dense dans E.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé, $F \subset E$ un sous-espace de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E *[Indication : on pourra utiliser la complétude d'un espace vectoriel de dimension finie.]*.

Exercice 5 (Identité du parallélogramme)**.** Soit $(E, ||.||_E)$ un espace vectoriel normé. On dit que la norme $||.||$ vérifie *l'identité du parallélogramme* si

$$\forall x, y \in E,\ \ ||x - y||^2 + ||x + y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right).$$

a) On suppose que $\forall x, y \in E,\ \ ||x - y||^2 + ||x + y||^2 \leq 2\left(||x||^2 + |y||^2\right)$. Montrer que $||.||$ vérifie l'identité du parallélogramme.

b) Montrer que si la norme $||.||$ dérive d'un produit scalaire sur E, elle vérifie l'identité du parallélogramme.

c) (plus difficile) Montrer que réciproquement, si $||.||$ vérifie l'identité du parallélogramme, elle dérive d'un produit scalaire.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel, d une métrique sur E. Montrer qu'il existe une norme $||.||$ sur E telle que d est la métrique associée à $||.||$ si et seulement d est telle que :
– $\forall x, y, z \in E,\ \ d(x + z, y + z) = d(x, y)$,
– $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ x, y \in E, d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

Exercice 7 (Hyperplans dans un espace vectoriel normé)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-evn, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle qu'un *hyperplan* de E est la noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

a) Soit φ une forme linéaire non continue sur E. Construire une suite (y_n) d' éléments de E qui converge vers 0, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(y_n) = 1$.

b) Montrer qu'un hyperplan $H = Ker(\varphi)$ de E est soit fermé dans E, auquel cas l'application φ est continue, soit dense dans E, auquel cas φ n'est pas continue.

Exercice 8. On définit une application sur $M_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ N(A) = n \max_{i,j=1,\ldots,n} |a_{i,j}|.$$

Démontrer que N est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$, puis qu'il s'agit d'une norme *sous-multiplicative*, i.e.

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}),\ \ N(AB) \leq N(A)N(B).$$

Exercice 9 (Exponentielle matricielle)**.** On admet qu'il existe des normes sous-multiplicatives sur $M_n(\mathbb{C})$ (voir l'exercice précédent).

a) Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Démontrer que la série $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} M^k$ est convergente. On note $exp(M)$ sa limite.

b) Démontrer que, pour toute $M \in M_n(\mathbb{C})$, $exp(M)$ s'écrit comme un polynôme en M. En particulier, M et $exp(M)$ commutent.

c) Démontrer que :

i) Pour toute $M \in M_n(\mathbb{C})$, ${}^t exp(M) = exp({}^t M)$.

ii) Pour toute $M \in M_n(\mathbb{C})$, $exp(M)$ est inversible, d'inverse $exp(-M)$.

iii) Pour $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $M = PNP^{-1}$, alors $exp(M) = Pexp(N)P^{-1}$.

iv) Pour $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, si $MN = NM$, on a $exp(M+N) = exp(M)exp(N)$.

d) Comment définirait-on le 'cosinus' $cos(M)$ d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$?

Exercice 10. Sur l'espace $\mathbb{R}[X]$, on définit les applications :

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,\ \ ||P||_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|\ ;\ \ ||P||_\infty = \max_{k=0,\dots,n} |a_k|\ ;\ \ ||P||_* = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|.$$

Montrer que ce sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$, et qu'elles sont deux à deux non équivalentes. On pourra à cet effet considérer les polynômes $P_n(t) = (t-1)^n$, et $Q_n(t) = 1 + t + ... + t^n$.

2 Autour des applications linéaires continues

Exercice 11. Soit $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux espaces vectoriels normés, $\ell : E \to F$ une application linéaire.

a) Si ℓ est continue, montrer que

$$||\ell|| = \sup_{||x||_E \leq 1} ||\ell(x)||_F = \sup_{||x||_E = 1} ||\ell(x)||_F = \sup_{||x||_E < 1} ||\ell(x)||_F = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{||\ell(x)||_F}{||x||_E}.$$

b) Montrer que ℓ est continue si et seulement s'il existe un réel M tel que $\forall x \in E, ||\ell(x)||_F \leq M||x||_E$, et que dans ce cas, $||\ell|| = \inf \{M \geq 0 : \forall x \in E, ||\ell(x)||_F \leq M||x||_E\}$.

Exercice 12. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, sur lequel on définit l'application :

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k \in \mathbb{R}[X],\ \ ||P||_\infty = \sup_{k=0,\dots,n} |a_k|.$$

a) Vérifier que $||.||_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Soit $T : \mathbb{R}[X] \ni P \mapsto XP \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que T est une application linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 13 (Exercice de rédaction)**.** Soit E, F deux espaces vectoriels normés, et $\ell : E \to F$. On suppose que l'image par ℓ de toute suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 est bornée. Montrer que ℓ est continue. *[Indication : raisonner par contrapposée en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un $x_n \in E \setminus \{0\}$ tel que $|\ell(x_n)| \geq n||x_n||$. À partir de (x_n), construire une suite $(y_n) \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que $|\ell(y_n)|$ n'est pas bornée.]*

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel normé, $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E, à valeurs dans E.

a) Montrer que, pour tous $T, U \in \mathcal{L}(E)$, on a $||U \circ T||_{\mathcal{L}(E)} \leq ||U||_{\mathcal{L}(E)} ||T||_{\mathcal{L}(E)}$, i.e. la norme d'opérateur est *sous-multiplicative.*

b) En déduire que, si $U \in \mathcal{L}(E)$ est fixé, les deux applications

$$\mathcal{L}(E) \ni T \mapsto U \circ T \in \mathcal{L}(E) \quad ; \quad \mathcal{L}(E) \ni T \mapsto T \circ U \in \mathcal{L}(E)$$

sont des applications linéaires continues.

c) Existe-t-il nécessairement sur $\mathcal{L}(E)$ des normes *multiplicatives*, i.e. telles que $||U \circ T||_{\mathcal{L}(E)} = ||U||_{\mathcal{L}(E)} ||T||_{\mathcal{L}(E)}$, pour tous $T, U \in \mathcal{L}(E)$?

Exercice 15 (Quelques normes matricielles)**.** On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ des normes $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$, respectivement définies par :

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ ||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,\ \ ||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2},\ \ ||x||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n (que l'on voit comme l'espace des applications linéaires (continues) sur $\mathbb{R}^n$), et $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espaces des matrices symétriques d'ordre n.

a) Déterminer les normes $|||.|||_1$ et $|||.|||_\infty$ sur $M_n(\mathbb{R})$, subordonnées respectivement aux normes $||.||_1$ et $||.||_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

b) Démontrer que la norme subordonnée $|||.|||_2$ sur $S_n(\mathbb{R})$ n'est autre que le *rayon spectral*, i.e.

$$\forall A \in S_n(\mathbb{R}),\ \ |||A|||_2 = \rho(A) = \max_{\lambda \in Spec(A)} |\lambda|,$$

où le *spectre* de A - $Spec(A)$ - désigne l'ensemble des valeurs propres de la matrice A.

3 Applications linéaires continues dans les espaces de suites et de fonctions

Exercice 16. Soit $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. On définit

$$\forall f \in X,\ \ ||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx\ ;\ \ ||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

a) Montrer que $||.||_1$ et $||.||_\infty$ définissent deux normes sur X.

b) Étudier la continuité de chacune des applications suivantes, et lorsqu' elles sont continues, calculer leur norme d'opérateur :

i)
$$T_1 : \begin{array}{ccc} (X, ||.||_1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$$

ii)
$$T_2 : \begin{array}{ccc} (X, ||.||_\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$$

iii)
$$T_3 : \begin{array}{ccc} (X, ||.||_1) & \longrightarrow & (X, ||.||_\infty) \\ f & \longmapsto & f \end{array}$$

iv)
$$T_4 : \begin{array}{ccc} (X, ||.||_1) & \longrightarrow & (X, ||.||_1) \\ f & \longmapsto & \left[x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right] \end{array}$$

v)
$$T_5 : \begin{array}{ccc} (X, ||.||_1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt \end{array}$$

Exercice 17. Soit $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, sur lequel on définit l'application :

$$\forall f \in X,\ ||f||_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}.$$

a) Montrer que $||.||_2$ définit une norme sur X *[Indication : penser à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz]*.

b) Soit $g \in X$ fixée. On définit une application $T : X \to X$ par $\forall f \in X,\ \ T(f) = gf$. Montrer que T est linéaire, continue, et calculer sa norme.

Exercice 18. Soit ℓ^∞ l'espace vectoriel des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$||x||_{l^\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|.$$

a) Soit $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ l'application définie par : $\forall k \in \mathbb{N},\ (T(x))(k) = x(k+1)$. Montrer que T est une application linéaire continue sur ℓ^∞ et calculer sa norme.

b) Soit $(a(k))_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\sum_{k=0}^\infty |a(k)| < \infty$. Montrer que l'application $U : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \ell^\infty,\ U(x) = \sum_{k=0}^\infty a(k)x(k)$$

est une application linéaire continue et calculer sa norme.

4 Espaces de Banach

Exercice 19. Soit $X = \mathcal{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continument dérivables sur $[-1,1]$ à valeurs réelles.

a) Démontrer que l'application définie par : $\forall f \in X,\ ||f||_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ est une norme sur X.

b) Montrer que la suite $(f_n) \in X^{\mathbb{N}}$, définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \\ x - \frac{1}{n}\sin(nx) & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

est une suite de Cauchy de X. En déduire que X, muni de la norme $||.||_\infty$ n'est pas complet.

c) On définit

$$N(f) = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[-1,1]} |f'(x)|.$$

Montrer que X, muni de la norme N est complet. *[Indication : considérer une suite de Cauchy de E, et se ramener au cas de deux suites de Cauchy de $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, qui est complet. Conclure en utilisant le fait que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, $f \in E$ et $f' = g$ si et seulement si $f(x) = \int_{-1}^x g(t)dt$.]*

5 Pour aller plus loin...

Exercice 20 (Inégalités de Hölder et de Minkoswki)**.** Si $p \in \mathbb{N}$, on note $\ell^p = \left\{(x_n)_{n\ge 0},\ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}$, l'espace vectoriel des suites *p-sommables*.

a) Démontrer l'*inégalité de Young* : si p, q sont deux entiers naturels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $a, b \in \mathbb{R}_+$,

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Indication : on pourra utiliser la convexité de l'application $x \mapsto e^x$.

b) Démontrer l'*inégalité de Hölder* : si p, q sont deux entiers naturels tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, $(x_n) \in \ell^p$ et $(y_n) \in \ell^q$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \le \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

c) Démontrer l'*inégalité de Minkowski* : si p, q sont deux entiers naturels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(x_n), (y_n) \in \ell^p$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n|^p \le \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Indication : on pourra se ramener à l'inégalité de Hölder avec des exposants p, q, et des suites judicieusement choisis.

En déduire que l'écriture $||(x_n)||_{\ell^p} = (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme sur ℓ^p.

Exercice 21 (Théorème de Volterra)**.** (*difficile*) Soit $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $g \in X$, et $K : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et bornée telle que :

$$\forall s, t \in [0,1], s > t\ \ K(s,t) = 0.$$

Démontrer que, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation intégrale de *Volterra*

$$\forall t \in [0,1],\ \ f(t) + \lambda \int_0^1 K(s,t) f(s)ds = g(t),$$

admet une unique solution $f \in X$ (*Indication : on pourra considerer l'espace X muni de la norme uniforme, qui est complet, et l'application $T_g : X \to X$, définie par $T_g(f) = f - \lambda \int_0^1 K(s,.)f(s)ds - g$, montrer qu'il existe une puissance $n \in \mathbb{N}$ telle que T_g^n est contractante, et utiliser un corollaire du théorème de Picard*).