TD n°3. Compacité

1 Exemples d'espaces compacts

Exercice 1. Déterminer si les sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ suivants sont compacts :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq e^x,\ x \geq 0,\ x + y \leq 2\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > e^x,\ x \geq 0,\ x + y \leq 2\}.$$

Exercice 2. Soient K et L deux parties compactes d'un espace métrique X. Montrer que $K \cup L$ est une partie compacte.

Exercice 3. Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$, qu'on identifie à $\mathbb{R}^{n^2}$. Montrer que $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = I\}$ est compact.

Exercice 4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite notée x, d'un espace métrique X. Montrer que $A := \{x\} \cup \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie compacte de X.

Exercice 5. Soit A et B deux fermés de $\mathbb{R}^n$. Soit $A + B = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$.

a) Montrer que, si A et B sont compacts, $A + B$ est compact.

b) Montrer que, si A est compact, $A + B$ est fermé.

c) $A + B$ est-il nécessairement fermé pour A et B fermés quelconques ?

2 Propriétés des espaces compacts

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique dont toute boule fermée $B_f(x, r) = \{y \in X, \quad d(x, y) \leq r\}$ est compacte.

a) Montrer que X est complet.

b) Montrer que les parties compactes de X sont les sous-ensembles fermés bornés.

Exercice 7. On se place dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues qu'on munit de la métrique

$$d_\infty(f, g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

On veut montrer que la boule unité fermée n'est pas compacte. Pour cela on donne deux exemples de suites sans valeur d'adhérence. Formaliser et comparer à l'exercice précédent.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Dessiner une fonction continue $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$, qui s'annule en dehors de l'intervalle $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ et qui prend la valeur 1 au milieu de l'intervalle. Que vaut $d_\infty(f_n, f_m)$?

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $g_n(x) = x^n$. Pour n fixé, que vaut $d_\infty(g_n, g_m)$ lorsque m est très grand ?

Exercice 8. Soit X un espace métrique et A un sous-espace compact non vide de X. Montrer qu'il existe un ensemble dénombrable dense dans A.
Indication : Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on considère un recouvrement avec des boules de rayon $\frac{1}{n}$.

Exercice 9. Soit (X, d) un espace métrique et soit F un fermé non vide de X et $F \neq X$.

a) Soit K un compact non vide tel que $K \cap F = \emptyset$. Montrer que $d(K, F) := \inf_{x\in K, y\in F} d(x, y)$ est strictement positif.

b) Soit $\epsilon > 0$. On définit $K_\epsilon := \{x \in X, \quad d(x, K) < \epsilon\}$. Soit Ω un ouvert de X, $\Omega \neq X$, tel que $K \subset \Omega$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $K_\epsilon \subset \Omega$.

c) Montrer que, si F est compact, alors il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que $d(K, F) = d(x, y)$.

Exercice 10. Si (X, d) est un espace métrique non vide, on note $diam(X) = \sup_{x,y\in X} d(x, y) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

a) Montrer que, si X est compact, alors $diam(X) \in \mathbb{R}_+$ et il existe $x, y \in X$ tels que $diam(X) = d(x, y)$.

b) Montrer que, si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non vides de X, alors $K := \bigcap_n K_n$ est un compact non vide de X et $diam(K) = \lim_{n\to\infty} diam(K_n)$.

Exercice 11. a) Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques avec (X, d) compact. Soit $f : X \to Y$ bijective et continue. Montrer que Y est compact et que f est un homéomorphisme.

Remarque : On peut reformuler cette propriété comme suit : si f est continue et injective, définie sur un espace compact, alors f est un homéomorphisme sur son image.

b) Soit $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{C}$, $f(t) = e^{it}$. Montrer que f est continue et injective. Montrer que la réciproque n'est pas continue. Comparer à la question précedente.

Exercice 12. Soit X un espace métrique compact. On munit l'ensemble $X^{\mathbb{N}} := \{f : \mathbb{N} \to X\}$ de la distance suivante

$$\delta(u, v) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} \min(1, d(u(k), v(k))).$$

a) Vérifier que δ est effectivement une distance.

b) Soit $(u_n)_n \subset X^{\mathbb{N}}$ et $u \in X^{\mathbb{N}}$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \delta(u_n, u) = 0$ ssi $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} d(u_n(k), u(k)) = 0$.

c) Montrer que $X^{\mathbb{N}}$ est compact.

Exercice 13 (une version compacte du théorème de Picard)**.** Soit (E, d) un espace métrique complet non vide et $f : E \to E$ une application telle que, pour tous $x, x' \in E$, $d(f(x), f(x')) < d(x, x')$.

a) La fonction f admet-elle nécessairement un point fixe ? (Considérer $E = [1, \infty[$ et $f(x) = x + \frac{1}{x}$.)

b) Dans la suite on suppose de plus que E est compact, montrer que f admet un unique point fixe a. On pourra étudier la fonction $x \mapsto d(f(x), x)$.

c) Soit $x_1 \in E$ et soit $x_{n+1} := f(x_n)$. Montrer que $x_n \to a$ quand $n \to \infty$.

Exercice 14. Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application telle que, pour tous $x, x' \in E$, $d(f(x), f(x')) \geq d(x, x')$.

a) Montrer que f est une isométrie, c'est-à-dire $\forall x, x' \in E, d(f(x), f(x')) = d(x, x')$. On pourra procéder comme suit :

   i) Fixer x et x' distincts tels que $d(f(x), f(x')) > d(x, x')$; montrer qu'il existe une extraction φ telle que $f^{\varphi(n)}(x)$ et $f^{\varphi(n)}(x')$ convergent.

   ii) Poser $\varepsilon = \frac{d(f(x),f(x'))-d(x,x')}{2}$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(f^{\varphi(n_0+1)}(x), f^{\varphi(n_0)}(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ et de même pour x'.

   iii) Soit $n_1 = \varphi(n_0 + 1) - \varphi(n_0) \geq 1$. Montrer que $d(x, f^{n_1}(x)) < \varepsilon$, puis conclure à une contradiction en majorant $d(f(x), f(x'))$.

b) Montrer que f est surjective. On pourra procéder comme suit :

   i) Soit $x_0 \in E$. On pose $\alpha = \inf_{z\in Z} d(x_0, z)$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $d(x_0, x_n) \geq \alpha$ pour tout $n \geq 1$, puis que $d(x_n, x_m) \geq \alpha$ pour tout $n \neq m$.

   ii) Montrer que $\alpha = 0$ et en déduire que $x_0 \in Z$.

Ainsi, un étirement d'un compact est une isométrie surjective. C'est évidemment faux si l'espace n'est pas compact !

3 Pour aller plus loin. . .

Exercice 15. Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement s'il est précompact (i.e. $\forall \alpha > 0$, X peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon α) et complet.

Remarque : l'implication $\Leftarrow$ est un théorème vu en cours.

Exercice 16. Soit (X, d) un espace métrique compact et soit Y l'ensemble des fermés non vides de X. Considérons $\delta : Y^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\delta(F_1, F_2) = \max(\sup_{x\in F_1} d(x, F_2), \sup_{x\in F_2} d(x, F_1)).$$

a) Montrer que pour tout $x \in X$ et $A, B \in Y$, $d(x, A) \leq d(x, B) + \delta(A, B)$. En déduire que δ est un distance.

b) Soit $\epsilon > 0$ et $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que X est l'union des boules ouvertes de centre x_i et de rayon ϵ. Pour $I \subset \{1, \ldots, n\}$, on note $F_I = \{x_i\}_{i\in I} \in Y$. Montrer que Y est recouvert par les boules de centre F_I et de rayon ϵ quand I parcourt toutes les parties de $\{1, \ldots, n\}$.

c) Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (Y, δ). Montrer que F_n converge vers $\overline{\bigcup_n \bigcap_{k\geq n} F_k}$. En déduire que Y est compact.